MAR 12 1926

# Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

## Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Leitzerstr. 43, führt. Bücherseudungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 3. Ausgegeben am 18. Februar 1926. No. 703. Printed in Germany. 27. Jahrgang.

### INHALT:

**Originalmitteilungen:**

P. Debye, Die Grundgesetze der elektrischen und magnetischen Erregung vom Standpunkte der Quantentheorie.

R. Bass, Über das spezielle Relativitätsprinzip und die Grenzgeschwindigkeit.

K. Gorbatscheff, Über elektrische Entladungsfiguren, welche mittels glühendem Gleitpol auf photographischen Platten erhalten wurden.

B. Gutenberg, Die Geschwindigkeit des Schalles in der Atmosphäre.

R. Mecke und A. Lambertz, Einige Vorlesungsversuche mit der Glimmlampe als Tongenerator.

F. P. Defregger, Zur Demonstration des Magnuseffektes.

H. Lorenz, Dio Wandrauhigkeit in der Strömungslehre.

R. Suhrmann und K. Clusius, Nachtrag zu der Notiz: „Über ein einfaches und sicheres Verfahren zur Abätzung dünnster Wollastondrähte".

**Besprechungen:**

M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre.

E. Wedekind, Kolloidchemie.

**Personalien.**

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

## Eingegangene Bücher.

(Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle.)

Astronomischer Kalender für 1926. Herausgegeben von der Universitäts-Sternwarte zu Wien. 45. Jahrg. 8°. 123 S. Wien, Carl Gerold's Sohn. Geb. M. 4.—.

**Berger, R.**, Die Schalltechnik. (Sammlung Vieweg, H. 83.) 8°. IV u. 115 S. Mit 97 Abb. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, A.-G. 1926. Br. M. 8.—.

**Damme, F. u. R. Lutter**, Das deutsche Patentrecht. 8°. XIV u. 692 S. 3. völlig neubearbeitete Aufl. Berlin, O. Liebmann. 1925. Br. M. 26.—, geb. M. 28.—.

**Engler, C. u. H. v. Höfer**, Das Erdöl. Bd. VI. Gr. 8°. XIV u. 802 S. Mit 11 Abb. Leipzig, S. Hirzel. 1925. Br. M. 60.—, Halblwd. M. 65—, Halbled. M. 70.—.

**Eversheim, P.**, Wellenlängenmessungen des Lichtes im sichtbaren und unsichtbaren Spektralbereich. (Sammlung Vieweg, H. 82.) 8°. V u. 111 S. Mit 28 Fig. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, A.-G. 1926. Br. M. 7.—.

**Friedmann, H.**, Die Welt der Formen. 8°. XV u. 510 S. Berlin, Gebr. Paetel. 1925. Br. M. 15.—, geb. M. 18.—.

Funk-Büchlein 1926. Ein Jahrbuch der Radiotechnik. 8°. 80 S. Stuttgart, Franckhsche Verlagshdlg. Br. M. 1.50.

**Günther, H. u. C. Culatti**, Wer gibt? 8°. XVI u. 247 S. Stuttgart, Franckhsche Verlagshdlg. 1925. Geb. M. 15.—.

**v. Jüptner, H.**, Gas, Dampf und Flüssigkeit. (Monographien zur Feuerungstechnik, H. 8.) 8°. 61 S. Mit 7 Abb. u. 34 Tabellen im Text. Leipzig, O. Spamer. 1925. M. 5.—.

**Korn, A.**, Die Konstitution der chemischen Atome. Gr. 8°. 159 S. Berlin, G. Siemens. 1926. Br. M. 7.50, geb. M. 9.—.

**Lamb, H.**, Hydrodynamics. 8°. XVI u. 687 S. 5. Aufl. Cambridge, University Press. 1924.

**Lamla, E.**, Grundriß der Physik. Gr. 8°. VI u. 318 S. 5., völlig neubearbeitete Aufl. Berlin, J. Springer. 1925. Geb. M. 12.—.

**Meitner, L.**, Atomvorgänge und ihre Sichtbarmachung. 8°. 32 S. Mit 12 Abb. Stuttgart, F. Enke. 1926. Br. M. 2.40.

**Meyer, R.**, Halocrscheinungen. (Abhandl. d. Herder-Instituts zu Riga I. Bd., Nr. 5.) 8°. 79 S. Riga, G. Löffler. 1925.

**Müller, W.**, Dynamik. (Sammlung Göschen 902.) I. Teil. Dynamik des Einzelkörpers. 8°. 160 S. Mit 70 Fig. Berlin, W. de Gruyter & Co. 1925. M. 1.25.

—, Dynamik. (Sammlung Göschen 903.) II. Teil. Dynamik von Körpersystemen. 8°. 137 S. Mit 51 Fig. Berlin, W. de Gruyter & Co. 1925. M. 1.25.

**Müller, O.**, Radioaktivität und neue Atomlehre. (Wissenschaft und Bildung Bd. 222.) 8°. 164 S. Mit 28 Fig. Leipzig, Quelle & Meyer. 1926. Geb. M. 1.80.

Physikbüchlein. Ein Jahrbuch der Physik. Herausgegeb. v. Dr. W. Bloch. 8°. 80 S. Stuttgart, Franckhsche Verlagshdlg. 1926. Br. M. 1.50.

**Pollak, R. W.**, Rechentafeln zur harmonischen Analyse. 4°. 22 S. Leipzig, J. A. Barth.

**Schmid, A.**, Die Diffusionsgaselektrode. 8°. 57 S. Mit 19 Abb. Stuttgart, F. Enke. 1923.

**Scott-Taggart**, Die Vakuumröhren und ihre Schaltungen für den Radio-Amateur. Gr. 8°. VII u. 180 S. Mit 136 Textabb. Berlin, J. Springer. 1925. M. 13.50.


Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 380314.

**Franz Schmidt & Haensch**

**Berlin S. 42,** Prinzessinnenstraße 16

**Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.**

**Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.**

Preislisten kostenlos.

# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 3. 1. Februar 1926. Redaktionsschluß für No. 5 am 10. Februar 1926. 27. Jahrgang.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

P. Debye, Die Grundgesetze der elektrischen und magnetischen Erregung vom Standpunkte der Quantentheorie. S. 67.

R. Bass, Über das spezielle Relativitätsprinzip und die Grenzgeschwindigkeit. S. 74.

K. Gorbatscheff, Über elektrische Entladungsfiguren, welche mittels glühendem Gleitpol auf photographischen Platten erhalten wurden. S. 79.

B. Gutenberg, Die Geschwindigkeit des Schalles in der Atmosphäre. S. 84.

R. Mecke u. A. Lambertz, Einige Vorlesungsversuche mit der Glimmlampe als Tongenerator. S. 86.

F. P. Defregger, Zur Demonstration des Magnuseffektes. S. 91.

H. Lorenz, Die Wandrauhigkeit in der Strömungslehre. S. 92.

R. Suhrmann u. K. Clusius, Nachtrag zu der Notiz: „Über ein einfaches und sicheres Verfahren zur Abätzung dünnster Wollastondrähte". S. 93.

**Besprechungen:**

M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre. 2. Aufl. S. 94.

E. Wedekind, Kolloidchemie. S. 94.

**Personalien.** S. 94.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Die Grundgesetze der elektrischen und magnetischen Erregung vom Standpunkte der Quantentheorie.


Von P. Debye.


1. Als Grundgesetz für die paramagnetische Erregung kann man das von P. Curie[1]) gefundene und von P. Langevin[2]) gedeutete Gesetz bezeichnen, wonach die paramagnetische (Massen-) Suszeptibilität $\chi_m$ der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist

$$\chi_m = \frac{C}{T}. \qquad (1)$$

Als Analogon dazu für die elektrische Erregung darf meines Erachtens das von mir[3]) vorgeschlagene Gesetz bezeichnet werden, wonach die dielektrische (Massen-) Suszeptibilität $\chi_e$ dargestellt werden kann in der Form[4])

$$\chi_e = A + \frac{B}{T}. \qquad (2)$$

Beide Gesetze können nur so lange als gültig angesehen werden, als die gegenseitige Wirkung der Moleküle vernachlässigbar klein ist und sind in diesem Bereiche experimentell bestätigt. Auf die Abweichungen, welche dann auftreten, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, insbesondere auf eine mögliche Umdeutung des Weißschen molekularen Feldes, soll erst im letzten Abschnitt dieser Notiz eingegangen werden.

Die etwas verschiedene Gestalt der beiden Gesetze ist rein äußerlich. In der Tat sollte man im allgemeinen auch im Curieschen Gesetze rechts noch eine additive Konstante hinzufügen (welche die temperaturunabhängige diamagnetische Magnetisierung mißt), wie das gelegentlich auch geschehen ist. Nur deshalb, weil das Glied $C/T$ im magnetischen Falle praktisch meistens stark überwiegt, wird die Konstante hier vielfach unterdrückt. Die beiden Gesetze stehen in unmittelbarem Zusammenhange, das erste mit dem Zeeman-, das zweite mit dem Stark-Effekt, und zwar mit jener Form dieser beiden Effekte, wo nicht nur auf die Aufspaltungen, welche linear im Felde sind, geachtet wird, sondern auch die quadratischen Effekte mit berücksichtigt werden. Es scheint nicht allgemein bekannt zu sein, daß die Form (2) des Temperaturgesetzes eine sehr allgemeingültige Folgerung aus dem durch jene Effekte gemessenen, energetischen Verhalten der Moleküle darstellt. Trotz der Einfachheit der hierher gehörigen Überlegung darf ich deshalb vielleicht im Folgenden einige Bemerkungen darüber machen. Einigen Wert erhalten dieselben indessen wohl nur durch den Umstand, daß sich so ein, wie mir scheint, naturgemäßer Weg bietet, die Abweichungen von den Grundgesetzen zu fassen.

1) P. Curie, Ann. de Chim. et Phys. (7) **5**, 289, 1895; Œuvres Paris 1908, p. 2.

2) P. Langevin, Journ. de Phys. (4) **4**, 678, 1905; Ann. de Chim. et Phys. (8) **5**, 70, 1895.

3) P. Debye, Physik. Zeitschr. **13**, 97, 1912. Vgl. auch die zusammenfassende Darstellung im Handb. d. Radiologie **6**, 597ff., 1924.

4) Die dielektrische (Massen-) Suszeptibilität ist definiert als das elektrische Moment, welches die Masseneinheit unter Einwirkung der Feldstärke 1 annimmt. Es ist also für ein Medium von der Dielektrizitätskonstante $D$ und der Dichte $\varrho$:

$$\chi_e = \frac{D-1}{4\pi}\frac{1}{\varrho}.$$

Um die Grundlagen möglichst rein und unvermischt mit unnötigen Nebenhypothesen herausschälen zu können, scheint es am besten, wenn man von einer allgemeinen thermodynamisch-statistischen Formulierung der Fragestellung ausgeht. Damit keine Verwirrung möglich und klar ist, welche Statistik getrieben wird, stelle ich die Formulierung und ihre Begründung voran.

2. Gegeben sei ein System, welches in $s$-Zuständen $1 \ldots i \ldots s$ vorkommen kann, von denen jedem bestimmte Energiewerte $u_1 \ldots u_i \ldots u_s$ und bestimmte statistische Gewichte $\varrho_1 \ldots \varrho_i \ldots \varrho_s$ zukommen. Betrachtet man dann das System in $Z$-Zeitpunkten oder $Z$ solche Systeme zugleich und befinden sich dann in den Zuständen $1 \ldots i \ldots s$, $z_1 \ldots z_i \ldots z_s$ dieser Systeme, so ist in der üblichen Boltzmannschen Weise die Wahrscheinlichkeit dieser durch die angegebenen $z_i$-Werte charakterisierte Verteilung[1])

$$W = Z! \prod_1^s \frac{\varrho_i^{z_i}}{z_i!}. \tag{1}$$

Fragt man wieder in üblicher Weise nach derjenigen Verteilung, für die $W$ maximal ist, bei gegebener Systemzahl $Z$ und gegebener Energie, die $ZU$ geschrieben werden soll, so findet man bekanntlich, daß $z_i$ die bestimmten Werte $z_i = \bar{z}_i$ haben muß, welche durch die Formel

$$\bar{z}_i = \alpha \varrho_i e^{-\beta u_i} \tag{2}$$

dargestellt sind. Darin folgen die beiden Konstanten $\alpha$ und $\beta$ aus $Z$ und $ZU$ durch Auflösung der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Z &= \alpha \sum_1^s \varrho_i e^{-\beta u}, \\ ZU &= \alpha \sum_1^s \varrho_i u_i e^{-\beta u_i}. \end{aligned}\right| \tag{3}$$

Das statistische Problem ist damit erledigt. Es bekommt seinen physikalischen Sinn indessen erst durch das Boltzmannsche Prinzip, wonach die zugehörige Entropie, welche wir konsequent $ZS$ zu schreiben haben, zu definieren ist durch den Ansatz

$$ZS = k \log W, \tag{4}$$

wobei $W$ derjenige Wert von $W$ nach (1) ist, welcher sich ergibt, wenn $z_i = \bar{z}_i$ gesetzt wird[2]).

1) Sind die Gewichte so definiert, daß $\sum_1^s \varrho_i = 1$, so entspricht $W$ der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsdefinition und ist stets kleiner als 1. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Verteilungen ist gleich 1, denn $W$ ist ja nur ein Glied der bekannten Entwicklung von $(\varrho_1 + \ldots + \varrho_i \ldots + \varrho_s)^{z_1} + \ldots + z_i + \ldots + z_s = 1^z$.

2) Die klassische Thermodynamik kann folgerichtig definiert werden als die Zusammenhänge, welche sich im lim für $Z = \infty$ ergeben. Bekanntlich wird man dann auch auf (4) geführt, falls man den Verteilungsversuch oft wiederholt denkt und die Entropie definiert als Mittelwert aller auftretenden $\log W$.

Diese Definition ist aber nach (1) äquivalent mit der Formel

$$S = k(\log Z - \log \alpha + \beta U)$$

oder falls die Summe

$$\sigma = \sum_1^s \varrho_i e^{-\beta u_i} \tag{5}$$

mit $\sigma$ bezeichnet wird, auch äquivalent mit der Darstellung

$$S = k\left(\log \sigma - \frac{\beta}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right). \tag{6}$$

Da einerseits nach (6)

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = k\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \tag{6'}$$

ist und andererseits nach (3) $U$ sich zu

$$U = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \tag{6''}$$

ergibt, so folgt nach der thermodynamischen Definition der Entropie, daß allgemein

$$\beta = \frac{1}{kT} \tag{7}$$

($T$ = absolute Temperatur) sein muß[1]).

Gewöhnlich wird das Resultat so zusammengefaßt, daß man aus (6), (3) und (7) folgert:

Um die freie Energie $F = U - TS$ zu finden, hat man zuerst die „Zustandssumme“

$$\sigma = \sum_1^s \varrho_i e^{-\frac{u_i}{kT}} \tag{8}$$

zu berechnen und dann zu setzen

$$F = U - TS = -kT \log \sigma. \tag{9}$$

Die ganze Überlegung ist offenbar völlig unabhängig von speziellen Annahmen über die möglichen Zustände im Einklange mit der vielfach benutzten Allgemeingültigkeit des durch die Beziehung

$$\bar{z}_i = \alpha \varrho_i e^{-\frac{u_i}{kT}}$$

1) Ordnet man die Glieder in (5) nach steigenden Werten von $u_i$, so daß $u_1$ der kleinste vorkommende Energiewert ist, so wird in der Grenze für $T = 0$

$$\sigma = \varrho_1 e^{-\beta u_1}$$

und nach (6)

$$S = k \log \varrho_1.$$

Dem Nernstschen Wärmesatze in seiner beschränkteren Fassung genügt diese Darstellung ohne weiteres, denn $S$ bleibt endlich bei $T = 0$. Wesentlich ist offenbar nur, daß die möglichen Zustände diskret verteilt sind.

Dem Nernstschen Wärmesatze in seiner allgemeinen Fassung würde die Festsetzung entsprechen, daß dem Zustande geringster Energie für die verschiedenen Systeme dasselbe statistische Gewicht ($\varrho_1$) zukommt. Ob man dann noch die $\varrho_i$ so normiert, daß $\varrho = 1$ und somit $S = 0$ wird, ist offenbar nebensächlich.

ausgedrückten Boltzmann-Maxwellschen Verteilungsgesetzes. So tritt z. B. der Unterschied zwischen Ergodenhypothese und Quantentheorie erst auf den Plan, wenn man nach der Bestimmung der statistischen Gewichte $\varrho_i$ frägt.

In unserem Falle der elektrischen oder magnetischen Erregung braucht allerdings die in (8) und (9) angebrachte Aussage eine kleine Ergänzung. Wenn ein Körper sich etwa in einem Magnetfelde $H$ befindet und ein magnetisches Moment $M$ angenommen hat, so hat er relativ zum Felde eine potentielle Energie $-MH$. Versteht man dann unter $U$ die innere Energie des Körpers, so hat man in der zweiten Gleichung von (3) nicht $U$, sondern die Gesamtenergie $U - MH$ einzusetzen. In den Ausdrücken für $u_i$ wird die Feldstärke $H$ als Parameter enthalten sein. Berechnet man dann wie in (6′) die Größe $\partial S/\partial\beta$, so ist $\frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta$ das Differential der Entropie bei konstant gehaltener Feldstärke. Andererseits enthält die (6″) entsprechende Gleichung links nicht $U$, sondern $U - MH$, dessen Differential unter derselben Voraussetzung $dU - HdM$ ist. Eine Kombination dieser beiden Gleichungen liefert also

$$dS = k\beta(dU - HdM)$$

und da das Differential der magnetisch an den Körper geleisteten Arbeit $HdM$ ist, so ist nach der Thermodynamik

$$dS = \frac{1}{T}(dU - HdM).$$

Auch hier bleibt also die Beziehung (7)

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

bestehen.

Da indessen (6″) links $U - MH$ statt $U$ enthält, folgt nun aus (6) nicht die gewöhnliche freie Energie, sondern das thermodynamische Potential

$$\Phi = U - TS - HM \qquad (10)$$

zu

$$\Phi = -kT \log \sigma. \qquad (11)$$

Alles läuft also darauf hinaus, daß der Logarithmus der Zustandssumme (8) nunmehr das thermodynamische Potential $\Phi$ nach (10) und (11) an Stelle der freien Energie definiert.

Ist $\Phi$ gefunden, so folgt ohne weiteres nach (10)

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}, \quad M = -\frac{\partial \Phi}{\partial H} \qquad (12)$$

Letzteres ist die uns hier interessierende Größe. Das Wesentliche ist demnach die durch (8) definierte Zustandssumme $\sigma$, welche nach (11) das thermodynamische Potential $\Phi$ liefert, aus dem schließlich das magnetische Moment $M$ durch Differentiation nach (12) folgt.

Entsprechendes gilt für die elektrische Erregung, man hat nur an Stelle von $H$ die elektrische Feldstärke $E$ zu substituieren und findet dann das elektrische Moment $M$ des Körpers.

3. Betrachten wir nun ein System, welches aus $N$ voneinander als gänzlich unabhängig betrachtete Molekülen besteht, die von außen magnetisch oder elektrisch beeinflußt werden. In diesem Falle wird die Zustandssumme (8) gleich der $N$ten Potenz einer nur auf das Einzelmolekül sich beziehende Summe sein. Zugleich wird nach (11) das thermodynamische Potential $N$mal einem Elementarwerte gleich werden, welcher sich aus der auf das Einzelmolekül bezüglichen Summe errechnet. Wir können also ohne weiteres von der Zustandssumme und dem thermodynamischen Potential des Einzelmoleküls sprechen und die entsprechenden Größen für das ganze System durch eine Erhebung in die Potenz $N$ bzw. durch Multiplikation mit $N$ erhalten. Um nun die Zustandssumme $\sigma$ z. B. im magnetischen Falle für das Einzelmolekül zu erhalten, müssen wir die Energiestufen $u_i$ kennen, welche das Molekül im Magnetfelde anzunehmen imstande ist. Es sei $W$ die Energiestufe des Moleküls im Felde o, im Felde $H$ seien $s$-Stufen vorhanden, von denen der $i$ten die von $H$ abhängige Energie $w_i$ zukommt. Unter diesen Umständen wird die auf das Einzelmolekül bezogene Zustandssumme nach (8)

$$\sigma = e^{-\frac{W}{kT}} \sum_1^s \varrho_i e^{-\frac{w_i}{kT}}. \qquad (13)$$

Nach (11) folgt

$$\Phi = W - kT \log \sum_1^s \varrho_i e^{-\frac{w_i}{kT}} \qquad (13')$$

und nach (12)

$$m = -\frac{\partial \Phi}{\partial H} = kT \frac{\partial}{\partial H} \log \sum_1^s \varrho_i e^{-\frac{w_i}{kT}}, \qquad (13'')$$

wenn $m$ das mittlere magnetische Moment bedeutet, welches ein Molekül im Felde $H$ annimmt. Wir wollen nun die Annahme einführen, daß die magnetisch bedingten Energiebeträge $w_i$ nach Potenzen der Feldstärke entwickelt werden können etwa in der Form

$$w_i = -\mu_i H - \frac{a_i}{2} H^2 + \ldots \qquad (14)$$

Höhere Potenzen in der Feldstärke zu berücksichtigen hat keinen Sinn, solange sich experimentell $m$ proportional mit der Feldstärke er-

gibt, wie das ohne weiteres aus (13″) hervorgeht. Entwickelt man in (13) nach Potenzen von $H$, so folgt

$$\Sigma \varrho_i e^{-\frac{w_i}{kT}} = \Sigma \varrho_i + \frac{H}{kT} \Sigma \varrho_i \mu_i + \\ + \frac{H^2}{2kT} \Sigma \varrho_i \left( \alpha_i + \frac{\mu_i^2}{kT} \right).$$

Aus (13′) erhält man dann

$$\Phi = W - kT \left\{ \log \Sigma \varrho_i + \frac{H}{kT} \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i}{\Sigma \varrho_i} + \right. \\ + \frac{H^2}{2kT} \frac{\Sigma \varrho_i \alpha_i}{\Sigma \varrho_i} + \frac{H^2}{2k^2T^2} \left[ \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i^2}{\Sigma \varrho_i} \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i}{\Sigma \varrho_i} \right)^2 \right] \right\}$$

und schließlich aus (13″)

$$m = \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i}{\Sigma \varrho_i} + H \left\{ \frac{\Sigma \varrho_i \alpha_i}{\Sigma \varrho_i} + \frac{1}{kT} \left[ \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i^2}{\Sigma \varrho_i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i}{\Sigma \varrho_i} \right)^2 \right] \right\} \qquad (15)$$

Nach dem Resultat (15) ist im allgemeinen schon für $H = 0$ ein magnetisches Moment vorhanden. Es verschwindet nur, wenn die statistischen Gewichte so verteilt sind, daß $\Sigma \varrho_i \mu_i$ den Wert Null hat. Das ist aber offenbar meistens der Fall. Unter der Annahme

$$\Sigma \varrho_i \mu_i = 0$$

ergibt sich dann statt (14)

$$m = H \left\{ \frac{\Sigma \varrho_i \alpha_i}{\Sigma \varrho_i} + \frac{1}{kT} \frac{\Sigma \varrho_i \mu_i^2}{\Sigma \varrho_i} \right\}. \qquad (15')$$

Damit ist allgemein bewiesen, daß die Suszeptibilität eine lineare Funktion von $1/T$ ist, solange die quadratische Näherung (14) für die Energie ausreicht und die Moleküle als unabhängig voneinander angesehen werden können. Entsprechendes gilt offenbar für die elektrische Erregung.

Man kann sich nun die Frage vorlegen, wie die Entwicklungskoeffizienten in (14) gewonnen werden können. Das aber kann offenbar geschehen, indem man sich auf die Bohrsche Theorie der Spektren stützt und aus der Spektralformel in Termdarstellung entnimmt, was die Energie des Normalzustandes im magnetischen oder elektrischen Falle ist. Offenbar wird man das erste Energieglied in (14), das das temperaturabhängige Glied in (15′) bedingt, interpretieren als durch ein magnetisches oder elektrisches Moment hervorgerufen, welches räumlich quantenhaft gerichtet ist. Das zweite Glied in (14), welches nach Ausweis des ersten Gliedes in (15′) mit der gewöhnlichen Polarisationsfähigkeit des Moleküls verknüpft ist, wird man deuten als Verzerrungsenergie der Elektronenbahnen. Aus der Art der Ableitung geht indessen hervor, daß die Beziehungen ganz unabhängig sind von den bildmäßigen Vorstellungen, die man daran anknüpfen will. Das lineare Glied in (14) entspricht in der Termdarstellung dem linearen Zeeman- bzw. Stark-Effekt, das quadratische Glied den quadratischen Effekten. Im übrigen ist die von Pauli[1]), Epstein[2]), Gerlach[3]) und Sommerfeld[4]) durchgeführte Diskussion der Curieschen Konstante auf einer Beziehung aufgebaut, welche mit (15′) identisch ist, sofern $\Sigma \varrho_i \alpha_i = 0$ angenommen wird. Im magnetischen Falle ist das offenbar gestattet, im elektrischen dagegen, bei der Diskussion der Dielektrizitätskonstanten ist eine Vernachlässigung der Polarisationsfähigkeit, d. h. des quadratischen Stark-Effektes nicht zulässig[5]).

Man kann sich Fälle denken, bei denen auch für erreichbare Feldstärken die durch (14) ausgedrückte Abhängigkeit von der Feldstärke keine genügende Darstellung ist. Betrachten wir, um einen in Einzelheiten durchgerechneten Fall ins Auge zu fassen, das Wasserstoffatom in einem höheren Quantenzustand. Dieser kommt dann, entsprechend der Sommerfeldschen Feinstruktur der Balmerlinien, in verschiedenen Modifikationen vor, deren Energiedifferenzen so gering sind, daß sie gleichzeitig in vergleichbaren Mengen vorhanden sein können[6]). Wenn man nun solche Atome einem elektrischen Felde aussetzt, tritt zunächst, nach den Rechnungen von Kramers[7]), eine Verschiebung der Energiestufen auf, welche proportional dem Quadrate der Feldstärke ist, um erst allmählich bei größeren Feldstärken in eine Verschiebung überzugehen, die linear im Felde ist und dem gewöhnlichen Stark-Effekt entspricht. Das Ganze findet statt im Bereiche experimentell erreichbarer Feldstärken. Für solche Atome hätte man also in (13) für $w_i$ das komplizierte Gesetz zu verwenden, das jene Verschiebung der Energiestufen ausdrückt und würde das mittlere Moment nach (13″) finden. Man hätte dann den merkwürdigen Fall, daß bei steigen-

1) W. Pauli, Physik. Zeitschr. **21**, 615, 1920.
2) P. Epstein, Science **57**, 532, 1923.
3) W. Gerlach, Physik. Zeitschr. **24**, 275, 1923.
4) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **19**, 221, 1923.
5) Nach den Versuchen von R. Ladenburg (Zeitschr. f. Phys. **28**, 51, 1924; Physik. Zeitschr. **26**, 685, 1925; Berl. Akad. **5**, 420, 1925) ist jetzt Aussicht vorhanden, die Beziehung zwischen dem quadratischen Stark-Effekt und der Dielektrizitätskonstante prüfen zu können.
6) Die Größenordnung der Wellenlängendifferenzen ist 0,1 Å; das entspricht einer Energiedifferenz von etwa $10^{-16}$ erg und diese Energie gleich $k\,T$ gesetzt führt auf eine Vergleichstemperatur von 1 Grad.
7) H. A. Kramers, Zeitschr. f. Phys. **3**, 199, 1920.

der Feldstärke die elektrische Suszeptibilität von einem durch das erste Glied (15′) ausgedrückten Betrage durch ein Übergangsgebiet hindurch zu einem zweiten durch das zweite Glied von (15′) ausgedrückten Betrage ansteigt. Nun ist es wohl kaum zu erwarten, daß man in absehbarer Zeit mit Wasserstoffatomen höherer Quantenzustände wird experimentieren können. Aber es scheint nicht von vornherein ausgeschlossen, daß andere Atome existieren, für welche ähnliche Verhältnisse experimentell erreichbar sind.

Die magnetische Analogie zu diesen Verhältnissen steht in entsprechendem Zusammenhange mit dem Paschen-Back-Effekt. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es interessant, daß Woltjer und Kamerlingh-Onnes[1]) bei tiefen Temperaturen in einigen Fällen sehr merkwürdige Kurven für den Zusammenhang zwischen Moment und Feldstärke gefunden haben, von denen z. B. die für $COCl_2$ und $NiCl_2$ bei 2,3° absolut den Übergang von einer kleineren Suszeptibilität in eine größere zeigen, wenn das Feld von 0 bis etwa 10000 Gauß steigt. Man wird indessen weitere Versuche abwarten müssen, bevor man in diesen Versuchen eine Analogie zum Paschen-Back-Effekt erkennen darf.

Es ist nicht sicher, ob sich unter den Atomen im Normalzustande eines finden wird, welches ein elektrisches Moment besitzt im Sinne von (14). Dagegen ist das Auftreten solcher Momente bei zusammengesetzten Molekülen nachgewiesen. Man muß nun bemerken, daß die obigen Überlegungen nicht ganz auf den letztgenannten Fall passen. Es wurde nämlich angenommen, daß es gestattet ist, von einem einzigen Normalzustande mit der Energie $W$ auszugehen. Das aber ist nur mit genügender Annäherung richtig, solange als die anderen möglichen Zustände Energiebeträge erfordern, deren Differenz gegen $W$ groß ist im Vergleich mit $kT$. Für Moleküle liegt der Fall nicht so, denn die verschiedenen möglichen Grundzustände, die hier in Betracht kommen, sind im wesentlichen nur durch die Rotationsenergie des ganzen Gebildes voneinander verschieden und die entsprechenden Energiestufen sind wegen dem relativ erheblichen Werte der Trägheitsmomente nur um Energiebeträge verschieden, die meistens wesentlich kleiner als $kT$ sind. Eine Möglichkeit auch jetzt noch die (15′) (für den elektrischen Fall) entsprechende Formel aufrecht zu erhalten ergibt sich, wenn die Termaufspaltung für alle Rotationsenergiestufen dieselbe ist. Wenn nämlich zu jeder Rotationsenergiestufe $W_j$ eine Reihe von Zusatzenergien $w_i (i = 1 \ldots s)$ durch das elektrische Feld geschaffen werden, so erhält man für die Zustandssumme die Darstellung

$$\sigma = \sum_{(j)} \left[ e^{-\frac{W_j}{kT}} \sum_{1}^{s} Q_i e^{-\frac{w_i}{kT}} \right],$$

was nur dann in das Produkt

$$\sigma = \sum_{(j)} e^{-\frac{W_j}{kT}} \cdot \sum_{1}^{s} Q_i e^{-\frac{w_i}{kT}}$$

zerfällt, falls die $w_i$ von der Nummer $j$ der Rotationsenergiestufe unabhängig sind. Eine ganz andere Möglichkeit, die merkwürdigerweise wieder zum gleichen Temperaturgesetz führt, wird von W. Pauli[1]) diskutiert für spezielle Moleküle vom Typus $HCl$. Hier ist für jede Energiestufe die Energie eine quadratische Funktion der Feldstärke und deshalb das Moment, welches einer Stufe entspricht, temperaturunempfindlich. Aber dieses Moment wird um so kleiner, je größer die Energie der Rotationsstufe ist, und außerdem ist die Verteilung der Moleküle über die Stufen naturgemäß von der Temperatur abhängig. Diese beiden Umstände erzeugen zusammenwirkend das alte Temperaturgesetz für das gesamte erregte Moment. Übrigens hat die Erfahrung das Gesetz bisher recht allgemein bestätigt[2]). Die Energiestufen der Rotation äußern sich in den Bandenspektren, die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ist demnach unmittelbar verknüpft mit dem Stark-Effekt der Bandenlinien[3]).

4. Die letzte Bemerkung steht, wie es scheint, in gewissem Zusammenhange mit einer möglichen Interpretation der in Flüssigkeiten und festen Körpern beobachteten Abweichungen vom Curieschen Gesetz. Bekanntlich hat P. Weiß, auf Grund seiner Theorie des molekularen Feldes an Stelle von (1) das Gesetz

$$\chi_m = \frac{C}{T - \Theta} \qquad (16)$$

abgeleitet und es wurde in der Tat festgestellt, daß in vielen Fällen $1/\chi_m$ eine lineare Funktion der Temperatur ist, in der die für $\Theta$ charakteristische additive Konstante nicht fehlt. Immer-

1) H. R. Woltjer, Versl. Amst. Akad. **34**, 494, 1925; H. R. Woltjer en H. Kamerlingh-Onnes, Versl. Amst. Akad. **34**, 502, 1925.

1) W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **6**, 319, 1921.

2) Zu den in meinem Artikel im Handbuch der Radiologie **6**, 597 ff., 1924 angegebenen Arbeiten sind in neuerer Zeit die schönen Experimentalarbeiten von C. T. Zahn, Phys. Rev. **24**, 400, 1924 und von C. P. Smyth and C. T. Zahn, Journ. Amer. Chem. Soc. **47**, 2501, 1925 hinzugekommen. Das Gesetz wird hier bestätigt für $HCl$, $HBr$, $HJ$ und $CH_2 : CH \cdot CH_2 \cdot CH_2$.

3) Eine Theorie dieses Effektes bei G. Hettner, Zeitschr. f. Phys. **2**, 349, 1920.

hin muß bemerkt werden, daß in vielen Fällen $\Theta$ negativ ist, was in der Weißschen Darstellung einem negativen Molekularfelde, d. h. einem Felde entspricht, welches der Polarisation entgegengesetzt gerichtet ist. Das Feld ist ferner so groß, daß es unmöglich durch die gegenseitigen magnetischen Wirkungen erklärt werden kann. Außerdem findet man, daß bei tiefen Temperaturen auch das Gesetz (16) nicht mehr genügt und die Temperaturabhängigkeit kompliziert wird, eine Erscheinung, die Kamerling-Onnes die kryomagnetische Anomalie nennt. Aus diesen und ähnlichen Gründen ist es zweifelhaft, ob man die Formel (16) mit Hilfe der Weißschen Hypothese des molekulären Feldes begründen soll[1]). Es drängt sich vielmehr die Auffassung auf, daß das Gesetz in der Form (16) selbst nur wieder eine Näherung für ein allgemeineres Temperaturgesetz ist, etwa ebenso wie van der Waals in seiner Zustandsgleichung mit dem Volumgliede $1/v - b$ die wirkliche Volumfunktion zu fassen sucht[2]).

In der Tat kommt man zu Formeln dieser Art für die Temperaturabhängigkeit, falls man für die Energie der Zustände im magnetischen Felde eine etwas allgemeinere Annahme macht, als das in 3 geschah. Wir nahmen dort an, daß die Energie des Einzelteilchens dargestellt werden konnte durch

$$W + w_i, \tag{17}$$

wobei $w_i$ nach (14) zu berechnen sein sollte. Man wird sich vorstellen, daß die verschiedenen Werte $w_i$ durch verschiedene Orientierungen des Elektronensystems gegen das äußere Feld zustande kommen. Wenn dann aber das Teilchen nicht völlig frei ist, sondern wie in Flüssigkeiten und Kristallen andere Atome ihm nahe benachbart sind, scheint es beinahe selbstverständlich, daß zu den verchiedenen Orientierungen schon im Felde o verschiedene Energien gehören werden. Man wird das dadurch auszudrücken versuchen, daß man nunmehr einem Quantenzustand $i$ die Energie

$$W + \varepsilon_i + w_i \tag{17}$$

zuschreibt, wobei $\varepsilon_i$ die eben genannte Orientierungsenergie bedeuten mag, während $w_i$ nach wie vor durch (14) gegeben ist.

Legt man (17′) zugrunde, so ergibt sich die Zustandssumme zu

$$\sigma = e^{-\frac{W}{kT}} \sum^{s} \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} e^{-\frac{w_i}{kT}}$$

oder nach Potenzen von $H$ entwickelt

$$\sigma = e^{-\frac{W}{kT}} \left\{ \sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} + \frac{H}{kT} \sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} + \frac{H^2}{2kT} \sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \left( \alpha_i - \frac{\mu_i^2}{kT} \right) \right|. \tag{18}$$

Nach (11) wird jetzt

$$\Phi = W - kT \left\{ \log \sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} + \frac{H}{kT} \frac{\sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} + \frac{H^2}{2kT} \frac{\sum \varrho_i \alpha_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} + \right. \\ \left. + \frac{H^2}{2k^2T^2} \left[ \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2 e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} - \left( \frac{\sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} \right)^2 \right] \right\} \tag{18'}$$

und schließlich nach (12) das mittlere Moment

$$m = \frac{\sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} + H \left\{ \frac{\sum \varrho_i \alpha_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} + \frac{1}{kT} \left[ \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2 e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} - \left( \frac{\sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} \right)^2 \right] \right\}. \tag{18''}$$

Soll für $H = 0$ auch $m = 0$ sein, so muß

$$\sum \varrho_i \mu_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = 0 \tag{19}$$

sein für alle Werte der Temperatur $T$. Das ist keine so weit gehende Bedingung, als es auf den ersten Blick scheinen mag, denn um sie zu erfüllen, ist nur nötig, daß die Termaufspaltung symmetrisch ist und einer Energiestufe mit positivem $\mu_i$ derselbe Wert $\varepsilon_i$ entspricht, wie der entsprechenden Stufe mit negativem $\mu_i$. Stellt man sich die $\mu_i$ vor als die Projektionen des magnetischen Momentes auf die Feldrichtung, so wird also verlangt, daß die positive und die negative Projektion dieselbe

1) Für eine eingehende Diskussion verweise ich auf meinen Artikel im Handbuch der Radiologie 6, 597 ff., 1924.

2) B. Cabrera hat neuerdings (Journ. de Phys. 6. 241, 273, 1925) eine Reihe von Gründen experimenteller Natur vorgebracht, warum eine Interpretation auf Grund der Weißschen Hypothese unwahrscheinlich ist.

Energie $\varepsilon_i$ gegen die Umgebung bedingt. Da aber die positive in die negative Projektion übergeht, indem man den Umlaufssinn des momenterzeugenden Elektrons umkehrt und die Energie $\varepsilon_i$ sehr wahrscheinlich auf die elektrischen Kräfte zwischen der Elekronenbahn und der Umgebung zurückgeführt werden muß, so liegt es auf der Hand, daß (19) in den meisten Fällen erfüllt sein wird. Ist das der Fall, dann nimmt (18″) die Form an

$$m = H \left| \frac{\sum \varrho_i c_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} + \frac{1}{kT} \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2 e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} \right| . \quad (19)$$

Schließlich kann noch die Korrektion wegen der diamagnetischen Erregung meistens vernachlässigt werden. Das erste Glied in (19) ist dann zu streichen und man erhält

$$m = \frac{H}{kT} \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2 e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} . \quad (19')$$

Das Curiesche Gesetz ist jetzt nicht mehr erfüllt, die Temperaturabhängigkeit ist komplizierter. Nur in der Grenze für hohe Temperaturen, ergibt sich wieder das alte Resultat

$$m = \frac{H}{kT} \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i} .$$

Schreiben wir allgemein

$$m = \frac{H}{kT} \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i} \tau(T), \quad (20)$$

so ist demnach die Korrektionsfunktion $\tau$ dargestellt in der Form

$$\tau = \frac{\sum \varrho_i \mu_i^2 e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \Big/ \sum \varrho_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \Big/ \sum \varrho_i} . \quad (21)$$

Es liegt nahe, $\tau(T)$ nach negativen Potenzen der Temperatur zu entwickeln; man erhält dann in erster Näherung

$$\tau = 1 + \frac{1}{kT} \left( \frac{\sum \varrho_i \varepsilon_i}{\sum \varrho_i} - \frac{\sum \varrho_i \varepsilon_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i \mu_i^2} \right) + \cdots \quad (21')$$

Betrachtet man andererseits das Weißsche Gesetz in dem oben dargelegten Sinne, so wird man auf die Entwicklung

$$\tau = 1 + \frac{\Theta}{T} + \cdots \quad (22)$$

geführt. Ist das Weißsche Gesetz wirklich ein Näherungsgesetz, so sollte also die charakteristische Temperatur $\Theta$ die Bedeutung haben, welche aus der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} k\Theta &= \frac{\sum \varrho_i \varepsilon_i}{\sum \varrho_i} - \frac{\sum \varrho_i \varepsilon_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i \mu_i^2} = \\ &= \sum \left( \frac{\varrho_i}{\sum \varrho_i} - \frac{\varrho_i \mu_i^2}{\sum \varrho_i \mu_i^2} \right) \varepsilon_i \end{aligned} \right| \quad (23)$$

hervorgeht. Eine Schwierigkeit bezüglich des Vorzeichens von $\Theta$ ist nicht vorhanden, denn aus (23) kann sich $\Theta$ offenbar ebensowohl positiv wie negativ ergeben.

5. Es dürfte erwünscht sein, die allgemeinen Überlegungen in 4 durch einige spezielle Beispiele zu illustrieren.

Es sei zunächst ein einfachster Fall angenommen, daß das Moment nur in Richtung des Feldes und entgegengesetzt zeigen kann. Beide Lagen mögen dasselbe statistische Gewicht $\varrho$ haben und seien durch dieselbe Energie $\varepsilon$ ausgezeichnet. Nach (19′) wird in diesem Falle streng

$$m = \frac{H}{kT} \mu^2 ,$$

d. h. das Curiesche Gesetz gilt ohne Korrektur.

Als zweiter Fall sei angenommen, daß ein Elementarmoment $2\mu$ existiert, welches in der Feldrichtung die 4 Projektionen $+2\mu$, $-2\mu$, $+\mu$, $-\mu$ aufweisen kann. Die beiden ersten Lagen seien durch die Energie $\varepsilon_2$, die beiden letzten durch die Energie $\varepsilon_1$ gekennzeichnet; die statistischen Gewichte seien für alle gleich. In diesem Falle wird nach (19′)

$$m = \frac{H}{kT} \frac{\frac{5}{2}\mu^2 \left( \frac{4}{5} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \right)}{\frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}} .$$

Es ist also in diesem Falle das Curiesche Gesetz nicht erfüllt, denn es tritt die Korrektionsfunktion

$$\tau = \frac{\frac{4}{5} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}{\frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}} = 1 + \frac{3}{5} \mathfrak{T}\mathfrak{g} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2kT}$$

hinzu. Wie aus dieser Darstellung oder auch aus (23) hervorgeht, ist diese Aussage in erster Näherung gleichbedeutend mit einem Ansatze nach Weiß, in dem die charakteristische Temperatur $\Theta$ definiert ist durch die Beziehung

$$k\Theta = \frac{3}{10} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Ob sich ein positiver oder negativer Wert von $\Theta$ ergibt, hängt also lediglich davon ab, ob $\varepsilon_1$ größer oder kleiner als $\varepsilon_2$ ist, d. h. davon, ob man Energie gewinnt oder leisten muß, wenn das Moment von der schiefen Lage in die parallele Lage übergeführt wird. Auch die

Größenordnung der in Frage kommenden Energiedifferenz macht keine Schwierigkeiten, denn sie ist gleich der Äquipartitionsenergie eines linearen Oszillators bei der Temperatur $\Theta$, was ja außerordentlich klein ist, gegen die für gewöhnlich im Atominnern vorhandenen Energiestufen und gut durch Wirkungen von außen bedingt sein kann.

Zürich, 15. Dezember 1925.

(Eingegangen 15. Dezember 1925.)

## Über das spezielle Relativitätsprinzip und die Grenzgeschwindigkeit.

Von Robert Bass.

Zusammenfassung: Es wird des Näheren ausgeführt, wieso in der speziellen Relativitätstheorie die Existenz von Wirkungen, die sich schneller als das Licht fortpflanzten, streng genommen nicht widerlegt ist. Würde man zur Definition der Zeit eine eventuelle Überlichtgeschwindigkeit verwenden, so käme man unter Umständen auch zur gewöhnlichen Relativitätstheorie. Ein Gedankenexperiment Thirrings und seine Deutung.

Unter dem Kausalgesetz verstehen wir hier die Aussage, daß für alle Ereignisse irgendwelche vorhergehende Ereignisse notwendig und gewisse vorhergehende Ereignisse hinreichend sind. Dabei heißt nach einer Definition von Reichenbach[1]), die mit dem Erleben in Einklang steht, ein 1. Ereignis früher als ein 2. am selben Raumpunkt, wenn ein Lichtsignal vom 1. zum 2. gelangen kann.

Wir erfahren aus der Lorentz-Transformation, daß 2 Ereignisse, die in einem Koordinatensystem $K$ im Raumabstande $\Delta x$ und im Zeitabstande $\Delta t > 0$ in einer gewissen zeitlichen Reihenfolge stattfinden, in einem andern Koordinatensystem $K'$ beobachtet in verkehrter Reihenfolge stattfinden müssen und zwar dann und nur dann, wenn $\frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{c^2}{v}$, d. h. $\Delta t' < 0$ ist[2]). Zum Interessantesten gehört es nun, was geschehen müßte, wenn eines dieser Ereignisse die Wirkung des andern wäre. Die Umkehrung ist nur dann und immer dann möglich, wenn der Raumbestand größer ist, als der Lichtweg in der Zeitdifferenz der beiden Ereignisse, wenn also das zweite schon eingetreten sein muß, bevor es ein Lichtstrahl, der vom ersten ausgegangen ist, erreicht haben kann. Um nun der anscheinend paradoxen Folge auszuweichen, daß ein Ereignis früher stattfinden könne als seine Ursache oder auch nur gleichzeitig mit ihr, nehmen die Relativitätstheoretiker meistens an, daß sich jede Wirkung höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen kann. Außer diesem Paradoxon, das mehr erkenntnistheoretischer als physikalischer Art ist, läßt sich aber in der Physik kein Grund dafür angeben, daß sich Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen können. Darauf hin weist uns auch eine Stelle in einer Abhandlung von Einstein[1]), in der es heißt, daß ein Stattfinden der Wirkung vor der Ursache dem Charakter unserer gesamten Erfahrung widerspreche (d. h. meines Erachtens nicht dem Inhalt), aber rein logisch keinen Widerspruch enthalte. Nimmt man nun ein solches Vorhergehen der Wirkung im Falle unserer Formel an, so folgt aus $\Delta t' < 0$ unbedingt $\frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{c^2}{v}$ und eine Überlichtgeschwindigkeit ist gegeben[2]). Die Tatsache über das Verhältnis der gewöhnlichen Geschwindigkeiten zu der des Lichts ist erstens die, daß bis jetzt keine größeren Geschwindigkeiten beobachtet wurden. Zweitens kann nach dem Kraftgesetz eine endliche Kraft ein mit Masse begabtes Ding in keiner endlichen Zeit bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigen. Drittens kann nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten die Zusammensetzung von Unterlichtgeschwindigkeiten niemals Lichtgeschwindigkeit ergeben. Viertens hätte ein mit Lichtgeschwindigkeit bewegter Körper wegen der Null im Nenner keine definierte Energie. Fünftens wären nach der Lorentz-Transformation und dem Massengesetz Raum-, Zeit- und Massenabmessungen von Körpern, die mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt werden, imaginär. Aber eine Wirkung ist im allgemeinen kein Körper[3]), und die Überlichtgeschwindigkeit einer solchen brauchte ja ebensowenig aus Unterlichtgeschwindigkeiten zusammengesetzt sein, als es die Lichtgeschwindigkeit ist, die ja auch existiert. Außer-

1) Bericht über eine Axiomatik der Einsteinschen Raum—Zeit-Lehre. Physik. Zeitschr. **22**, 683, 1921.

2) Aus $\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **4**, 411, 1907. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, § 5, S. 424.

2) Der Nachweis der kausalen Verknüpfung kann in diesem Fall auf den gewöhnlichen zurückgeführt werden, indem man von einem Koordinatensystem ausgeht, in dem die Reihenfolge der Ereignisse normal ist.

3) Wäre die Energieübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit im Raume unmöglich, so kann rein logisch noch eine gedacht werden, die sich vermittelst anderer hypothetischer Dimensionen den Weg abkürzt, so daß im Raum selbst betrachtet eine unstetige Überlichtgeschwindigkeit erschiene. Wirkungsübertragung ohne Energieübertragung ist zwischen nichtphysischen Realitäten denkbar, zwischen physischen mit dem Energieprinzip nicht vereinbar, wenn sie nur in einer Energieänderung bestehen kann.

dem ist die Relativitätstheorie der Physik entsprungen. Ob sie uns über die Ablaufsgeschwindigkeit von Vorgängen in anderen Gebieten der Welt, z. B. im Gebiet des Lebens und der Seele etwas aussagt, wissen wir erst, wenn der Zusammenhang zwischen den physischen und den anderen Gebieten klargestellt ist.

Man könnte den Einwand machen, daß eine Überlichtgeschwindigkeit mit der Relativitätstheorie nicht vereinbar sei, denn dann müßte man die Zeit mit ihrer Hilfe und nicht mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit definieren und messen. Deswegen wollen wir auseinandersetzen, warum man gerade das Licht zur Definition der Zeit verwendet. Daß das Licht gleiche Wege in gleichen Zeiten zurücklegt, ist nach Einstein eine Definition[1]). Aber man sieht leicht, daß diese physikalische Definition mit dem psychischen Erleben gleichförmiger Bewegung in Einklang steht, wie es aus einer Gleichzeitigkeit verschiedener Ereignisse an nahezu demselben Orte bestimmt werden kann. Eine solche Gleichzeitigkeit kann man nach Einstein annehmen, „ohne für diese fundamentale Tatsache eine Definition zu geben[2])". Wenn man einen Lichtstrahl zwischen zwei parallelen Spiegeln senkrecht hin und her laufen läßt, so kann man erstens durch Definition festlegen, daß die Zeit eines Hinweges des Lichtes gleich der Zeit eines Rückweges ist. Daß dann das Licht beim zweiten Hinweg die gleiche Zeit braucht wie beim ersten, läßt sich aber unter gewissen Voraussetzungen beweisen. Man nimmt zu diesem Zwecke einen zweiten Apparat, der genau so beschaffen ist wie der erste und läßt in diesem einen zweiten Lichtstrahl sehr nahe dem Lichtstrahl im ersten Apparat gleichzeitig[3]) mit dem Beginn des zweiten Hinweges des ersten Lichtstrahles zu laufen beginnen. Wird nun wieder durch unmittelbares Erleben festgestellt, daß die Ankunft des zweiten Lichtstrahles am Ende seines ersten Hinweges gleichzeitig mit der Ankunft des ersten Lichtstrahles am Ende seines zweiten Hinweges stattfindet, so darf man sagen, daß auch der zweite Hinweg des ersten Lichtstrahles die gleiche Zeit braucht wie sein erster Hinweg und zwar dann, wenn man in diesem Fall das Kausalgesetz und die Homogenität des Raumes insofern voraussetzt, als man annimmt, daß die Vorgänge in den beiden gleichbeschaffenen Apparaten gleich verlaufen. Unter Homogenität (und Isotropie) des Raumes müssen wir, da wir das Wort Zeit noch nicht aussprechen dürfen, den Umstand verstehen, daß ein Körper alle seine Eigenschaften unabhängig davon hat, ob er durch relative Translation oder Rotation in eine neue Lage gebracht wird oder nicht. Über die Zeit sagen wir dabei nichts; wir betrachten nur die Zustände im Raum. Diese Betrachtungsweise ist genau so zulässig wie jede, die von einem $n$-dimensionalen Gebilde zu bestimmten Zwecken nur $n-1$ dimensionale Schnitte berücksichtigt. Die Vergleichungen der Einzelzeiten der Lichtstrahlen kann man sich nun beliebig fortgesetzt denken und unter der Isotropieannahme auch auf die Rückwege anwenden, wenn man einen der Apparate umdreht; wodurch dann bewiesen ist, daß die Lichtgeschwindigkeit gleichförmig ist, wenn keine kleineren als die Spiegelabstände betrachtet werden[1]). Wir dürfen also unter den genannten Voraussetzungen annehmen, daß die Zeiten, die wir mit gleichen Wegen der Lichtstrahlen messen, einander gleich sind, so daß wir die Vorrichtung stets als Uhr verwenden dürfen und mit ihrer Hilfe mechanische Uhren durch die Forderung eichen können, daß gleichen Lichtstrahlwegen auch gleiche Zeigerwege entsprechen sollen. Dies wird auch mit raumzeitlichen Koinzidenzen festzustellen sein. Man kann zur Definition der Zeit auch andere Geschwindigkeiten als die des Lichtes verwenden. Zur speziellen Erläuterung diene folgende Überlegung: Wenn das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten nach Lichtzeit richtig ist, dann muß es mit Uhren, die mit dem Licht im obigen Sinne geeicht und sychronisiert wurden, an Vorgängen beobachtet werden können.

Zu diesem Zwecke ist folgendes Verfahren geeignet: Man eicht und synchronisiert in einem Koordinatensystem $K$ 2 Uhren an verschiedenen Stellen der $X$-Achse und verwendet zu diesem Zweck eine Lichtquelle, die in $K$ ruht. Eine Periode der Uhren nennt man 1 Sekunde und überträgt dann die Uhren auf die sehr nahe und parallele $X'$-Achse des Systems $K'$, das sich relativ zu $K$ mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt. Nun nennt man eine Periode der Uhren im System $K'$ „1 Sekunde in $K'$" und synchronisiert die Uhren mittels der Strahlen einer in $K'$ festen Lichtquelle noch einmal. Ein nochmaliger Eichungsversuch würde zeigen, daß die Uhren ihren gleichförmigen Gang beibehalten haben. Dann eicht und synchronisiert man im System $K$ noch einmal 2 Uhren auf die beschriebene Art. Mittels dieser Zeitmesser und mit Maßstäben

1) Abhandlungen über die Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.
2) Vgl. Anm. 1, S. 74, Spalte rechts.
3) Im psychologischen Sinne.

1) Der Beweis für die Gleichförmigkeit der Lichtgeschwindigkeit mag wegen seiner Voraussetzungen bekämpft werden; seine Bedeutung wird aber weiter unten bei der Betrachtung einer ungleichförmigen Geschwindigkeit schärfer hervortreten.

in $K$ und $K'$ kann man nun die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten beobachten. Ein Beobachter in $K'$ mißt die Geschwindigkeit eines Vorgangs und findet sie in der $X'$-Richtung zu $w$ cm/sec. Ein Beobachter in $K$ findet die Geschwindigkeits-$X$-Komponente des besagten Vorgangs zu $W$ und die des Koordinatensystems $K'$ zu $v$ cm/sec. Dann muß nach der speziellen Relativitätstheorie aus vielen derartigen Messungen der Beobachter die Formel hervorgehen:

$$\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}=W.$$

Nun denken wir uns eine Wirkungsquelle, die in $K$, bzw. in $K'$ ruhend angebracht, Wirkungen aussendet, deren Geschwindigkeit in allen Richtungen mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit verglichen in $K$ bzw. $K'$ gleichförmig ist. Daß es derartige Geschwindigkeiten gibt, ist eine bekannte Tatsache. Ein Eisenbahnzug z. B. würde unter der Voraussetzung konstanter Antriebskraft, konstanter Reibung und konstanten Luftwiderstandes von seinem jeweiligen Bahndamm aus beurteilt mit der Lichtgeschwindigkeit verglichen gleichförmig fahren, ob er dies auf der Erde oder auf einem anderen Stern täte. Unter den genannten Voraussetzungen müssen in beiden Systemen Uhren hinsichtlich ihres gleichförmigen und synchronen Ganges gleich sein, ob sie mit dem Lichte oder mit jenem anderen Vorgang hergestellt werden. Nehmen wir dessen Geschwindigkeit nun größer als die Lichtgeschwindigkeit an, so gehen die Uhren gleich, ob man auch eine speziell beschaffene Überlichtgeschwindigkeit zur Definition der Zeit verwendet hätte; und da das Additionstheorem das Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit als Sonderfall enthält, dieses aber die Lorentz-Transformation nach sich zieht, so würde man auch mit einer Definition der Zeit nach einer Überlichtgeschwindigkeit unter diesen Umständen zur gewöhnlichen Physik kommen. Dadurch erhält auch folgender Satz von Einstein einen spezielleren Sinn[1]), „. . . welche Art von Vorgängen man für eine solche Zeitdefinition wählt, ist an sich gleichgültig. Man wird aber mit Vorteil für die Theorie nur einen solchen Vorgang wählen, von dem wir etwas Sicheres wissen. Dies gilt von der Lichtausbreitung im leeren Raum im höheren Maße als von allen anderen in Betracht kommenden Faktoren — dank den Forschungen von Maxwell und H. A. Lorentz". Nur eine ungleichförmige Bewegung ist zur Messung der Zeit dann nicht geeignet, wenn man physikalisch unter Gleichzeitigkeit dasjenige verstehen will, was auch psychologisch als solche erlebt wird. Es wäre ja grundsätzlich möglich, die Zeit so zu definieren, daß z. B. unter gleichen Zeiten solche verstanden werden, die gleichen Wegen eines fallenden Steines entsprechen. Aber brächte man dann eine Vorrichtung so an, daß ein zweiter Stein eng neben dem ersten zu fallen beginnt, wenn der erste schon ein Stück gefallen ist, so bemerkte man, daß die beiden Steine, die einen psychologischen Moment nebeneinander waren, am Ende ihres Weges nicht psychologisch gleichzeitig ankommen, daß also unter den obigen Kausalitätsvoraussetzungen die Geschwindigkeit des Steines weiter unten eine andere ist, als oben. Derart wäre die Festsetzung, daß ein Stein mit konstanter Geschwindigkeit fällt oder allgemein, daß eine Geschwindigkeit, die, mit der Lichtgeschwindigkeit verglichen, ungleichförmig ist, konstant sei, mit dem psychologischen Gleichzeitigkeitserlebnis im Widerspruch und insofern unpraktisch. Verbieten kann einem allerdings diese Festsetzung niemand. Aber da eben daraus die Willkürlichkeit der Zeitdefinition hervorgeht, kommt man wieder zum Ergebnis, daß einem auch niemand verbieten kann, gerade das Licht zur Zeitdefinition zu verwenden, was es auch immer für Geschwindigkeiten geben möge; zumal ja der Umstand, daß wir von der Lichtausbreitung im Vakuum etwas Sicheres wissen, durch die eventuelle Entdeckung einer Überlichtgeschwindigkeit nicht berührt würde.

Die Widerspruchslosigkeit der zwei Annahmen, spezielle Relativitätstheorie und Überlichtgeschwindigkeit geht daraus hervor, daß die letztere mit den kinematischen Grundformeln der Relativitätstheorie vereinbar ist; was in Rechnungen gezeigt werden soll. Die dynamischen Formeln kommen hier nicht in Betracht, da es sich nicht um Körper handelt. Bei dieser Gelegenheit mögen auch einige Beziehungen hergeleitet werden, die Eigenschaften einer gleichförmigen Überlichtgeschwindigkeit zeigen.

Es werden zwei Punktereignisse betrachtet, die im Koordinatensystem $K$ mit den Koordinaten $x_1$, $t_1$ bzw. $x_2$, $t_2$ auf der $X$-Achse im Längsabstande $\Delta x$ und im Zeitabstande $\Delta t$ stattfinden. Dann ist ihr Längs- bzw. Zeitabstand im Koordinatensystem $K'$, das sich mit paralleler $X'$-Achse relativ zum ersten mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt

$$\text{I.}\quad \Delta x'=\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

1) Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie. Vieweg.

II. $$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

Diese Formel ist richtig, ohne daß etwas über das Verhältnis des $\Delta x$ zum $\Delta t$ ausgemacht wird. Da sie unter gewissen Voraussetzungen das Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist, so sehen wir, daß dieses auch noch gilt, wenn $\frac{\Delta x}{\Delta t} > c$. Um die Formel zum Additionstheorem der Geschwindigkeiten zu machen, muß man nur annehmen, daß ein Ereignis durch das andere bewirkt wird. $v$ ist natürlich $< c$, denn es ist die Geschwindigkeit eines Körpers.

Wählt man $\frac{\Delta x}{\Delta t} > c$, so muß auch $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} > c$ sein, solange der Nenner im Additionstheorem positiv ist, denn aus

$$\frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} > c$$

folgt $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} > c$.

Beachtet man unter Voraussetzung von $\Delta x > 0$, $\Delta t > 0$ die Konsequenzen von I

III. $\Delta x' \gtrless 0$, wenn beziehungsweise $\frac{\Delta x}{\Delta t} \gtrless v$ und $\Delta t' \gtrless 0$, „ „ $\frac{\Delta x}{\Delta t} \gtrless c^2 : v$ ist

(bei $\Delta x \gtrless 0$ bzw. $\Delta t \gtrless 0$ gelten für $\Delta t' > 0$ die Formeln:

III′ $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \gtrless -v$ bzw. $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \gtrless -\frac{c^2}{v}$),

so erhält man für

$$c < \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c^2}{v} \quad \text{auch} \quad c < \frac{\Delta x'}{\Delta t'} < \infty$$

und für $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c^2}{v}$ auch $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \infty$ und zwar im Sinne einer „vollzogenen" Unendlichkeit; die Wirkung braucht zur Durchmessung der endlichen Strecke $\Delta x'$ keine Zeit. Daher geht der Geschwindigkeitsbegriff verloren; „unendliche Geschwindigkeit" ist nur ein passender Name.

Mit $\frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{c^2}{v}$ wird $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} < 0$, wobei $\Delta x' > 0$; die Wirkung läuft in der Zeit zurück.

Die Fälle $\frac{\Delta x}{\Delta t} < v$ brauchen hier nicht diskutiert zu werden.

Nun könnte noch der Einwand erhoben werden, eine Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit sei deshalb nicht möglich, weil vermittelst einer solchen ein Ereignis in $K$ in einem Koordinatensystem $K'$ früher wahrgenommen werden könnte, als es zufolge der Lorentz-Transformation in ihm stattgefunden hat, dagegen später, als es in $K$ stattgefunden hat; woraus hervorginge, daß die Lorentz-Transformation die Zeit nicht richtig transformiere. Untersuchen wir deshalb folgende Frage: Auf der $X$-Achse im System $K$ sende ein Ereignis $x_1, t_1$ eine Wirkung mit der Geschwindigkeit $w$ aus. Das System $K'$ bewege sich mit der $X'$-Achse in der $X$-Achse mit der Geschwindigkeit $v$; a) zu welcher Zeit $t_1'$ findet dort das Ereignis statt?, b) zu welcher Zeit $t_2'$ gelangt ein Wirkungsstrahl zu einem Beobachter in $x_2'$?

IV.
$$\begin{cases} \text{a) } t_1' = \dfrac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{b } \alpha) \; t_2' = \dfrac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \beta) \; x_2' = \dfrac{x_2 - v t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}}}, \quad \gamma) \; t_2 = t_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{w}. \end{cases}$$

Aus diesen 3 Gleichungen mit den Unbekannten $x_2, t_2, t_2'$ ergibt sich

V. $$t_2' = (w \cdot t_1 - x_1)\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{w - v} + \frac{x_2'}{w'}.$$

Zum Vergleich mit $t_1'$ kann man auch die aus IV. b, $\alpha$ und $\gamma$ genommene Formel verwenden:

VI. $$t_2' = \frac{t_1 + \frac{x_2 - x_1}{w} - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die Forderung $t_1' = t_2'$ hat dann, wie zu erwarten, die singuläre Lösung $x_1 = x_2$ und die reguläre Lösung $w = \frac{c^2}{v}$; auf den Raumpunkt des Beobachters kommt es nicht an und $w$ liegt über $c$ und selbstverständlich gerade dort, wo es $w'$ unendlich macht. Allgemein sind die Beziehungen verbunden $t_2' \gtrless t_1'$ und $w \gtrless \frac{c^2}{v}$. Somit gibt es Werte von $w$, die je nach Größe von $v$ sehr beträchtlich über $c$ liegen und die Ablaufsfolge nicht verändern. Wenn $w > \frac{c^2}{v}$, so ist es nicht korrekt zu sagen, man sehe das Ereignis „bevor es stattgefunden habe"; sondern man würde dann ein bewirktes Ereignis, das

Eintreffen des Wirkungsstrahles in $x_2' = x_2$ vor dem bewirkenden, der Absendung des Strahles in $x_1$ wahrnehmen. Das Resultat ist naturgemäß mit den Formeln III identisch. Ferner könnte man das Punktereignis als zerlegt auffassen. Einen Teil „schickt es in der Zeit zurück". Ein einziges Ereignis ist es nur in $x_1$ selbst. Im Entartungsfalle $v = c$ wird wie $t_1'$ auch $t_2'$ sinnlos; das sieht man aus VI. sofort; in V. wird

$$w' = \frac{w - c}{1 - \frac{w}{c}} = -c,$$

daher ist nach III'. mit $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -\frac{c^2}{c} \Delta t = 0$, $w$ undefiniert und der erste Term von V. sinnlos. Grenzwertberechnungen sind nicht gestattet, weil ja nicht vorausgesetzt wird, daß $v$ sich $c$ nähert, sondern daß $v = c$ ist.

Fragen wir, wie weit die Rückverlegung gehen kann, so erhalten wir die Antwort

$$\text{VII.} \qquad t_1' - t_2' = \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{w}\right) \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

also bei geeigneter Wahl der Größen beliebig weit. Auch $t_2 = t_1'$ ist daher erfüllbar. Wegen

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhält man die nötige Geschwindigkeit zu

$$\text{VIII.} \qquad v = \frac{x_1 t_1 + t_2 \sqrt{x_1^2 + c^2 (t_2^2 - t_1^2)}}{(x_1/c)^2 + t_2^2}.$$

Wie eine Zeitdifferenz mit Hilfe des Wirkungsstrahles im fixen Punkt $x_2'$ wahrgenommen wird, lehrt die Gleichung V., wenn man sie differenziert:

$$\text{IX.} \qquad \Delta t_2' = (w \Delta t_1 - \Delta x_1) \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{w - v}.$$

Verlangt man $\Delta t_1' = \Delta t_2'$, daß die „wirkliche" und die beobachtete Zeitdifferenz gleich sein sollen, so erhält man $w = \frac{c^2}{v}$, wobei $\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \neq v$ ist.

Herr Professor Thirring hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die Annahme einer Überlichtgeschwindigkeit zu folgender Konsequenz führt: Ein Beobachter auf der Erde entsendet ein schneller als das Licht laufendes Signal, indem er z. B. auf einen Knopf drückt. Ein Beobachter auf dem Planeten Neptun empfängt das Signal, antwortet sofort und der Mann auf der Erde erhält nun die Antwort, bevor er noch die Frage abgeschickt hat. Das führt zu einem Konflikt mit der Willensfreiheit.

Wenn wir diesen Gedanken, der die gleiche Richtung der psychologischen und physikalischen Zeit voraussetzt, rechnerisch verfolgen, so können wir so vorgehen: Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall, daß ein Beobachter in $K$ vom Punkte $x_1$ auf der $X$-Achse zur Zeit $t_1$ einen Strahl längs der $X$-Achse mit der Geschwindigkeit $w$ aussendet; dieser kommt zur Zeit $t_2$ im Punkte $x_2$ an. Von $K'$ aus beurteilt, das sich relativ zu $K$ mit paralleler $X'$-Achse mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt, hat die Absendung die Koordinaten $x_1', t_1'$ und die Ankunft die Koordinaten $x_2', t_2'$. Dann wird der Strahl in $x_2'$ sofort reflektiert und zwar so, daß er nun relativ zu $K'$ die Geschwindigkeit $-w$ hat. Er kommt zur Zeit $t_3'$ in $x_3'$ bzw. zur Zeit $t_3$ in $x_1$ wieder an. Dann folgt aus $t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{w}$ sowie der zu VII. analogen Gleichung

$$t_2 - t_3 = -\left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{w}\right) \frac{x_3' - x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und aus den Formeln

$$x_3' = \frac{x_1 - v t_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - v t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

die Beziehung

$$\text{X.} \qquad t_1 - t_3 = \frac{\left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{w}\right)\left(1 - \frac{v}{w}\right) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{w}}{1 - \frac{v^2}{c^2} + v\left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{w}\right)} \cdot (x_2 - x_1).$$

Und z. B. für $w > \frac{2c^2}{v} > 0$ wird $t_1 - t_3 > 0$.

Dies läßt sich folgendermaßen deuten: Da die Antwort vor der Frage erfolgt, könnte man den Einwand machen, daß der Beobachter, wenn er die Antwort erhalten hat, dann plötzlich die Frage unterlassen könnte, sei es aus freiem Willen oder weil er gewaltsam daran verhindert wird; in diesem Falle wäre dann die Wirkung ohne Ursache eingetreten, hätte aber gerade so gut nicht eintreten können. Das ist nun ganz und gar unmöglich; denn es besteht eine vollkommene Abhängigkeit des früheren Ereignisses vom späteren. Entweder der Beobachter wird auf den Knopf drücken, dann wird er unter Umständen die Antwort schon früher erhalten haben oder er wird nicht auf den Knopf drücken, dann kann er die Antwort nicht erhalten haben; hat er sie also bekommen, so ist es unmöglich, daß er am Abdrücken ver-

hindert werden oder dieses unterlassen könne. Das eine Ergebnis ist daher das folgende: In den Fällen, in denen ein Vorgang mit Überlichtgeschwindigkeit ausgelöst werden würde, könnte dies durch nichts mehr verhindert werden, wenn schon Wirkungen stattgefunden haben; oder es müßte ein äquivalenter Vorgang stattfinden. (Voraussetzung ist dabei natürlich, daß man Geschehenes nicht ungeschehen machen kann. Sollte die Verhinderung aus physikalischen Gründen möglich sein, so wäre in dieser Hinsicht der Wille gebunden.) Auch ohne Rücksendung ist eine Verhinderung der Ursache von einem Koordinatensystem aus, in dem die Reihenfolge verkehrt ist, nicht möglich, wenn die Wirkung schon stattgefunden hat.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Möglichkeit von Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit aus physikalischen Gründen vorläufig nicht streng widerlegt ist; der Kausalsatz aber ist nach Untersuchungen von Helmholtz[1]), Planck[2]), Schlick[3]) u. a. keine schlechthin notwendige Behauptung, sondern nur eine der Erfahrung entstammende Hypothese.

1) Schriften zur Erkenntnislehre, Springer.
2) Kausalgesetz und Willensfreiheit. Springer.
3) Allgemeine Erkenntnislehre, Springer.

(Eingegangen 17. Dezember 1925.)

## Über elektrische Entladungsfiguren, welche mittels glühendem Gleitpol auf photographischen Platten erhalten wurden.

Von K. Gorbatscheff.

Für Erzeugung elektrischer Entladungsfiguren auf photographischen Platten bediente ich mich einer Versuchsanordnung mit zwei Entladungsgefäßen, die schon in einer früheren Mitteilung[1]) beschrieben worden ist. Zur Herstellung der Entladungsfiguren mittels glühenden Gleitpols benutzte ich eine modifizierte Versuchsanordnung (Fig. 1). In dieser Versuchsanordnung ersetzte ich einen Messingkegel $C$ durch eine Platinöse[2]) $G$, welche ich durch Strom erhitzte. Diese Platinöse machte ich aus einem Stück Platindraht (Durchmesser 0,15 mm, Länge 3 cm). Die Enden dieses Platindrahtstückes waren in die durchgesägten Enden zweier dicker Kupferdrähte (Durchmesser 2,5 mm, Länge 25 cm) eingelötet. Die Kupferdrähte isolierte ich voneinander mittels einer Glasröhre und befestigte sie in dem vertikal stehenden Teil des T-förmigen Glasrohres $B$, so daß die Platinöse die lichtempfindliche Schicht einer photographischen Platte $E$ berührte. Diese Platinöse verbinde ich einerseits mit Messingkegel $C$ und einem Induktoriumspol, anderseits schaltete ich sie in einen Heizstromkreis ein, der vollständig auf isolierenden Unterlagen steht. Zur Temperaturmessung der erhitzten Platinöse bediente ich mich des Amperemeters $A$ des Heizstromkreises. Zur Eichung der Amperemeterablesungen in Temperaturgraden machte ich eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen dem Widerstand eines Platindrahtes (Durchmesser 0,15 mm, Länge 58 cm) und der Stromstärke, die diesen Platindraht erhitzte.

Die Stromstärke im Induktoriumprimärkreis hatte ich so reguliert, daß die maximale Funkenlänge zwischen Funkenmikrometerpolkugeln (Durchmesser 2,5 cm) $M$ (Fig. 1) 5 mm betrug. Die entsprechende Spannung zwischen den Gleitpolen $C$ und $G$ und den Messingböden $D$ und $D$ war ungefähr 17,4 KV.

Der Einfluß verschiedener Eigenschaften von lichtempfindlichen Schichten und Beschaffenheiten von Glasplatten eliminiere ich möglichst, indem ich eine photographische Platte (10 × 15 cm) durchschneide und deren beide Hälften auf die Messingböden $D$, $D$ legte. Nach Unterbrechung des Primärstromes und Entwicklung der photographischen Platten erhielt ich zwei elektrische Entladungsfiguren: eine gewöhnliche, erhalten mittels kalten Gleitpols (Messingkegel), und eine andere, erhalten mittels erhitzten Gleitpols (Platinöse).

### Negative Entladungsfiguren.

Die gewöhnlichen Entladungsfiguren sind bekannt und von mir nur zur Bestimmung der Gleitspannung und zum Vergleich mit den mittels glühenden Gleitpols erhaltenen Entladungsfiguren hergestellt.

Die gewöhnliche negative Entladungsfigur, die erhalten wurde auf photographischen Platten mittels kalten Gleitpols, besteht aus einem kreisförmigen hellen Fleck mit dunklen Radien (Polbüschel) und Ladungskanälen, die auf ihren Knickungen und Spaltungen „Zwischenbüschel" und an ihren Enden „Endbüschel" zeigen[1]).

1) „L'influence de l'ionisation sur le décharge glissant dans l'air avec une pression atmosphérique et temperature ordinaire". Tiflis 1923.
2) Diese Vorrichtung hatte Wesendonck in seinen Versuchen über Büschelentladungen und Lichtenberg Figuren benutzt. Wied. Ann. **30**, 1, 1887.

1) Z. B. siehe Abbildungen von J. Brown, Phil. Mag. (6) **25**, 502, 1888, Taf. VI, Fig. A; D. Latschinoff, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Gesellsch. **20**, 41, 1888, Fig. 2 u. 18; G. Sieben, Berl. Ber. 395, 1889, Taf. II, Fig. 3 u. 7; A. W. Porter, Nature **83**, 142, 1910, Fig. 4; M. Toepler, Ann. d. Phys. (4) **53**, 217, 1917, Taf. I u. II, Fig. 3 u. 5; P. O. Pedersen, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fis. Medd. 1 (11), 1—76, 1919, Fig. 5.

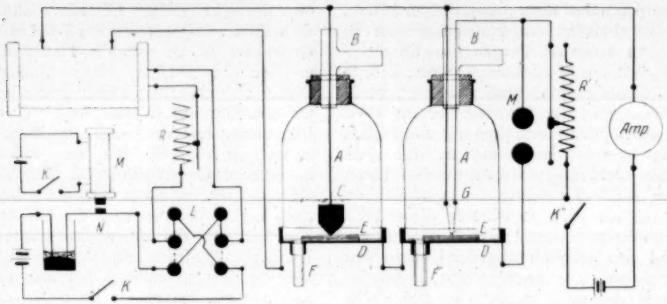



Fig. 1.

Die gleichzeitig mittels glühenden Gleitpols erhaltene Entladungsfigur (Gleitpolspannung bis 16,8 KV.) besteht nur aus oval- oder ellipsenförmigen hellen Flecken mit dunklen Radien (Polbüschel).

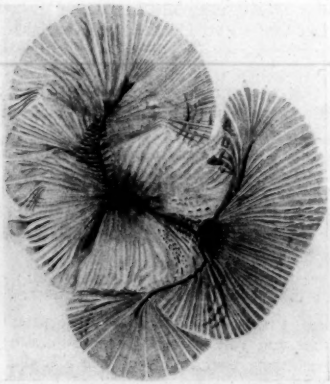


Fig. 2. Negative Entladungsfigur, kalte Platinöse.

Die Unterschiede zwischen den bekannten negativen Entladungsfiguren, welche nur aus Polbüscheln bestehen[1]), und meinen, mittels glühenden Gleitpols erhaltenen, bestehen nicht nur in der Form (die ovalen oder ellipsenförmigen Konturen meiner Figuren hängen wahrscheinlich von der Form der glühenden Gleitpol-Platinöse ab), sondern auch in einigen hellen Flecken oder Punkten, die isoliert voneinander auf einer Figurenfläche liegen[1]). Diese Punkte haben eine regelmäßige Verteilung, da sie sich auf Kreisbogen ordnen lassen. Die Achsenverhältnisse dieser ellipsenförmigeren Figur haben für

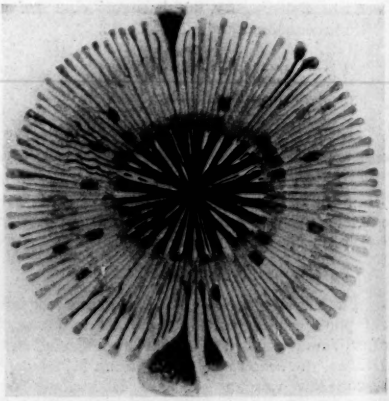


Fig. 3. Negative Entladungsfigur, glühende Platinöse ($T = 335^0$).

einige Figuren verschiedene Werte (von 1,10 bis 1,30). Die Polbüschel zeigen in ihrem Zentrum etwa 40 dunkle Radien (einige Werte liegen an der Grenze 10—50) und zeigen an ihrem Rand etwa 80 dunkle, radiale gerade Linien (einige Werte liegen an der Grenze 70—100). Die gewöhnliche Entladungsfigur ist bedeutend größer als die Figur, welche gleichzeitig mittels glühenden Gleitpols erhalten wird[2]).

1) Z. B. siehe Abbildungen von S. Mikola, Physik. Zeitschr. **18**, 158, 1917, Fig. 3; G. Sieben, loc. cit. Fig. 1, 2, 4, 5, 9—13; M. Toepler, loc. cit. Fig. 1 u. 2; P. O. Pedersen, loc. cit. Fig. 7; P. O. Pedersen nennt diese Figur „Normale negative Figur".

1) Etwas Ähnliches zeigt M. Toepler, loc. cit. Tafel 1, Fig. 2; aber die Randflecken auf dieser Figur sind deutlich als „Explosionszentren" zu erkennen.

2) Da die Originalplatten bei mehrmaligem Postversand

Tabelle I.

| $R_k$ | $r_k$ | $E$ | $i$ | $T$ | $a$ | $b$ | $R_k$ | $a/b$ | $N$ | $R_k/R_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,0 | 7,0 | 10,0 | 1,9 | 480 | 7,5 | 6,5 | 7,0 | 1,15 | 8 | 1,14 |
| 14,0 | 8,0 | 11,0 | 2,0 | 530 | 9,0 | 8,0 | 8,5 | 1,12 | 0 | 1,65 |
| 14,0 | 9,5 | 12,8 | 2,0 | 530 | 10,0 | 9,0 | 9,5 | 1,11 | 4 | 1,47 |
| 13,0 | 10,0 | 13,4 | 1,5 | 280 | 10,5 | 9,5 | 10,0 | 1,10 | 27 | 1,30 |
| 18,0 | 10,0 | 13,4 | 1,8 | 430 | 10,5 | 9,5 | 10,0 | 1,10 | 18 | 1,80 |
| 14,0 | 10,5 | 14,55 | 1,4 | 250 | 11,0 | 10,0 | 10,5 | 1,10 | 22 | 1,33 |
| 20,0 | 12,5 | 16,8 | 1,8 | 430 | 13,0 | 10,0 | 11,5 | 1,30 | 18 | 1,74 |
| | | | | | | | Mittel | 1,15 | 14 | 1,50 |

Fig. 2 und 3 zeigen ein paar negative Entladungsfiguren, die gleichzeitig mittels kalter und mittels glühender Platinöse erhalten sind. Fig. 4 stellt eine bei 275° erhaltene negative Entladungsfigur dar.

Die Figurendimensionen und einige Messungsergebnisse zeigt Tabelle I: $i$ = Heizstrom in Amp., $T$ = entsprechende Temperatur der Platinöse, $R_k$ = „mittlerer Radius“[1]) für gewöhnliche negative Entladungsfiguren, $r_k$ = ihr Polbüschelradius, $a$ und $b$ = große und kleine Halbachsen der negativen mittels glühenden Gleitpols erhaltenen Entladungsfiguren, $R_k = \frac{a+b}{2}$ „mittlerer Radius“, $N$ = Punktezahl und $E$ = Gleitpolspannung, berechnet aus der Polbüschelgröße der gewöhnlichen Figur nach M. Toeplers Formel[2]).

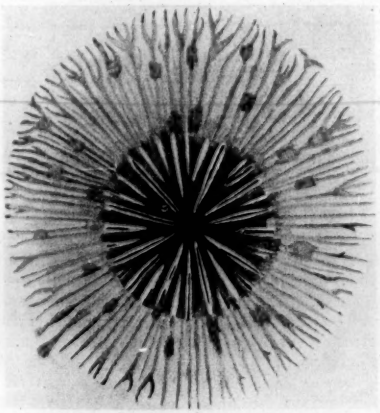


Fig. 4. Negative Entladungsfigur, glühende Platinöse ($T = 275°$).

Aus Tabelle I kann man sehen, daß die maximale Ausdehnung des Polbüschels für negative Entladungsfiguren, welche mittels glühenden Gleitpols erhalten waren, größer ist als die gewöhnliche (ungefähr $a - r_k$ gleich 0,5 mm), aber die ganze Fläche der gewöhnlichen Entladungsfiguren ist größer als die für Figuren vom glühendem Gleitpol. Tabelle II zeigt Dimensionen und Messungsergebnisse negativer Entladungsfiguren, welche ich mit glühendem Gleitpol allein, d. h. ohne Vergleichsaufnahme erhielt.

Tabelle II.

| $i$ | $T$ | $a$ | $b$ | $R_k$ | $N$ | $a\,b$ | $E$[2]) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,3 | 215 | 10,0 | | 19,5[1]) | 11 | | 12,8 |
| 1,5 | 280 | 12,0 | 10,0 | 11,0 | 13 | 1,20 | 15,1 |
| 2,0 | 530 | 14,0 | | 24,55[1]) | 17 | | 17,3 |

Tabelle III stellt die Punktverteilung auf der Figurenfläche dar.

Aus Tabelle III sehen wir, daß die Punkte sich hauptsächlich auf Abständen von 6 und 8 mm anordnen.

## Positive Entladungsfiguren.

Die gewöhnlichen positiven Entladungsfiguren, bei geringer Spannung, zeigen positive Polbüschel, die aus Leuchtfäden bestehen[3]). Bei höherer Spannung kann man an den Ladungskanälen Leuchtfäden bilden sehen[4]). Die gleichzeitig mittels glühenden Gleitpols erhaltene po-

zerbrochen waren, sind die Abbildungen nach sorgfältigen Zeichnungen angefertigt.

1) „Mittlerer Radius“ der Figur ist Mittelwert aus 12 Radienmessungen (nach verschiedenen Richtungen).

2) M. Toepler, Ann. d. Phys. (4) **53**, 224, 1917.

1) Diese Werte $R_k$ berechnete ich wie $R_k$, da diese Figuren mit Ladungskanälen, Zwischen- und Endbüscheln erhalten waren.

2) Diese Werte $E$ berechnete ich aus $a$-Werten (größere Halbachse des Polbüschels), die ich um 0,5 mm verkleinerte, da Tabelle I zeigt, daß der Mittelwert $a - r_k$ gleich 0,5 mm ist.

3) Siehe z. B. Abbildungen von G. Sieben, loc. cit. Taf. II. Fig. 8; D. Latschinoff, loc. cit. Fig. 9 u. 21; K. Przibram, Wien Ber. **109** (IIa), 902, 1900, Fig. 2; K. Przibram, Wien Ber. **108** (IIa), 1161, 1899, Fig. 1; S. Mikola, loc. cit. Fig. 2 u. 14; P. O. Pedersen, loc. cit. Fig. 6, 14, 16 u. 19; die erste Figur nennt er „Normale positive Figur.“

4) Z. B. siehe Abbildungen von J. Brown, loc. cit. Taf. VI, Fig. B; D. Latschinoff, loc. cit. Fig. 10.

Tabelle III.

| $T$ °C | $E$ KV. | $N$ | Abstand der Punkte vom Figurenzentrum in Millimetern | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | 6,0 | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 10,5 | 11,0 | 11,5 |
| 215 | 13,4 | 13 | | 1 | | 1 | | 2 | 2 | | 3 | 2 | 2 | | | | | | |
| 250 | 14,55 | 22 | | | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 280 | 13,4 | 27 | 2 | 5 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | | 1 | | | |
| 430 | 13,4 | 18 | | 3 | 3 | 1 | | 3 | 2 | 1 | | 4 | 1 | | | | | | |
| 430 | 16,8 | 18 | | | | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | | 4 | 2 | 2 | 1 | | | | |
| 480 | 10,0 | 8 | | | | | | 2 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | |
| 530 | 12,8 | 4 | | | | | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | | |
| 530 | 17,3 | 18 | | | | | | 1 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | | 3 |
| | | | 2 | 9 | 6 | 7 | 7 | 17 | 9 | 11 | 11 | 18 | 10 | 7 | 4 | 4 | 3 | 0 | 3 |

Gesamte Zahl der Punkte, welche auf entsprechenden Abständen liegen.

sitive Entladungsfigur hat ganz ähnliche Form und unterscheidet sich nur in den Dimensionen. Tabelle IV gibt Figurendimensionen und Meßergebnisse: $R_k$ und $R_k$ sind „mittlere Figurenradien" für gewöhnliche und mittels glühender Platinöse erhaltene Entladungsfiguren, $E$ = die Gleitpolspannung, die aus $R_k$ nach M. Toeplers Formel berechnet ist.

Tabelle IV.

| $R_k$ | $E$ | $i$ | $T$ | $R_k$ | $R_k/R_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,8 | 1,0 | 120 | 5 | 0,60 |
| 12,75 | 7,65 | 2,0 | 530 | 15,1 | 0,84 |
| 17,7 | 10,6 | 1,9 | 480 | 16,0 | 1,10 |
| 17,7 | 10,6 | 1,8 | 430 | 18,0 | 0,98 |
| 19,5 | 11,7 | 2,0 | 530 | 20,1 | 0,97 |
| 24,0 | 14,4 | 2,5 | 790 | 25,5 | 0,94 |
| 27,7 | 16,6 | 1,9 | 480 | 31,2 | 0,88 |
| 31,0 | 18,6 | 1,8 | 430 | 28,7 | 1,08 |
| | | | | Mittel | 0,92 |

In der zweiten Versuchsreihe ersetzte ich den Messingkegel $C$ durch eine Platinöse, die gleiche Dimensionen hatte wie die erste, und erhielt so gleichzeitig zwei Entladungsfiguren, eine von der kalten und eine zweite von der glühenden Platinöse.

Negative Entladungsfigur.

Die gewöhnliche negative Entladungsfigur, die ich bei niedriger Spannung erhielt, hatte ellipsenförmigen Umriß (Polbüschel). Die Achsenverhältnisse hatten einen mittleren Wert gleich 1,15 (einige Werte liegen an den Grenzen 1,05—1,23). Bei höherer Spannung besteht eine gewöhnliche negative Entladungsfigur aus ellipsenförmigen Polbüscheln und Ladungskanälen mit Zwischen- und Endbüscheln. Die gleichzeitig mittels glühenden Gleitpols erhaltene negative Figur besteht (bis zu Spannungen von 18,0 KV.) nur aus ellipsenförmigen Polbüscheln mit dunklen Radien, radialen Linien (auf Figurenrand) und hellen Flecken und Punkten. Das Achsenverhältnis ist gleich 1,1 (einige Werte liegen an den Grenzen 1,04—1,15). Auf Tabelle V kann man sehen, daß die negative durch glühende Gleitpole erhaltene Entladungsfigur größere Polbüschel hat, als die gewöhnliche Figur ($r_k > r_k$), so daß im Mittel $r_k - r_k = 1$ mm. Auf einigen Entladungsfiguren sind helle Flecken und Punkte nur undeutlich sichtbar; für solche Figuren bezeichnete ich die Punktzahl mit Null.

Die hellen Flecken und Punkte lassen sich meistens auf Abständen von 5,0 und 7,5 mm ordnen.

Tabelle V.

| $R_k$ | $r_k$ | $E$ | $i$ | $T$ | $a$ | $b$ | $r_k$ | $R_k$ | $N$ | $a/b$ | $R_k/R_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,54 | 7 | 10,0 | 1,85 | 465 | 7,5 | 7,0 | 8,0 | 7,16 | 7 | 1,07 | 0,91 |
| 7,6 | 9,5 | 12,8 | 1,75 | 410 | 7,5 | 6,75 | 8,0 | 7,25 | 12 | 1,11 | 1,05 |
| 9,9 | 11 | 14,55 | 1,75 | 410 | 11 | 10 | 11 | 10,5 | 0 | 1,10 | 0,94 |
| 10,25 | 11 | 14,55 | 1,75 | 410 | 12 | 11 | 12 | 11,5 | 0 | 1,09 | 0,89 |
| 14,5 | 11 | 14,55 | 1,75 | 410 | 11,5 | 10,5 | 12 | 11,0 | 0 | 1,10 | 1,32 |
| 20,9 | 11 | 14,55 | 1,75 | 410 | 14 | 13,5 | 14 | 13,75 | 0 | 1,04 | 1,52 |
| 10,6 | 12 | 14,7 | 1,75 | 410 | 12,5 | 11,5 | 12,5 | 12,2 | 0 | 1,09 | 0,87 |
| 30,7 | 12 | 15,7 | 1,75 | 410 | 13 | 12,5 | 13 | 12,75 | 0 | 1,04 | 2,41 |
| 13,9 | 13 | 16,8 | 1,6 | 335 | 15 | 13 | 15 | 13,9 | 0 | 1,15 | 1,09 |
| 18,6 | 13 | 16,8 | 1,6 | 335 | 13 | 12 | 14 | 12,9 | 18 | 1,08 | 1,44 |
| 17,5 | 14 | 17,95 | 2,1 | 590 | 14 | 13 | 15 | 13,9 | 23 | 1,08 | 1,26 |
| 32,2 | | | 1,75 | 410 | | | | 28,1 | | | 1,14 |
| | | | | | | | | Mittel | 15 | 1,09 | 1,23 |

### Positive Entladungsfiguren.

Die beiden positiven Entladungsfiguren sind sehr ähnlich. Die Unterschiede bestehen nur in der Zahl der Zweige (Leuchtfäden) und den Dimensionen. Die gewöhnliche Figur hat im Mittel die Zweigzahl um 1,2 mal größer, und, wie Tabelle VI zeigt, um etwa 1,2 mal größeren Radius, als die mittels glühenden Gleitpols erhaltene.

Tabelle VI.

Heizstromstärke 1,55 Amp., Temperatur etwa 315°.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_k$ | 13,9 | 14,1 | 16,25 | 20,0 | 30,9 | |
| $R_h$ | 11,3 | 13,5 | 13,5 | 15,7 | 27,8 | |
| $R_k/R_h$ | 1,23 | 1,04 | 1,20 | 1,27 | 1,11 | Mittel 1,17 |

In den Tabellen I—VI sind die Versuchsergebnisse für Temperaturen unter 600° dargestellt. Die Versuche mit höheren Temperaturen waren erfolglos, da wegen der Lichtwirkung des glühenden Platindrahtes ich nur kreisförmige, detaillose, helle Flecken bekam. Nur ganz zufällig erhielt ich ein paar positive Entladungsfiguren mit Platinösetemperatur etwa 800° (Tabelle IV). Auf dieser Figur verläuft ein Ladungskanal im Figureninnern wie eine dunkle Linie[1]).

Zur Herstellung von Entladungsfiguren bei höherer Temperatur als 600° benutzte ich eine dritte Anordnung. Ich legte zwischen die zwei Platinösen und die lichtempfindlichen Schichten je eine Ebonitplatte (etwa 0,8 mm dick).

### Negative Entladungsfiguren.

Die negativen, mittels kalten Gleitpols durch eine Ebonitplatte hindurch erhaltenen Figuren haben einen unregelmäßigen Umriß und bestehen aus Punkten und kleinen Flecken. Diese Flecken haben unregelmäßige oder mannigfaltig gekrümmte, linienförmige Gestalt und manchmal ordnen sie sich kettenförmig den fächerartig auseinandergehenden Linien an. Die größten Flecken sitzen meistens an den Figurenrändern. Auf einer dieser negativen Figuren kann man Strahlen sehen, die deutlich einen positiven Charakter zeigen. Auf einer anderen negativen Figur kann man kleine fünfstrahlige Sterne sehen, die einen positiven Charakter zeigen und isoliert von der Figur liegen[1]).

Die gleichzeitig mittels glühenden Gleitpols durch die Ebonitplatte hindurch erhaltenen negativen Figuren haben eine ellipsen- oder kreisförmige Kontur. Im Innern dieser Figur kann man helle Punkte sehen, die sich am Figurenrand in kreis- oder büschelförmige Flecken verwandeln. Alle diese Figuren haben eine dunkle Ausbuchtung, die ungefähr bis in die Mitte der Figur vorrückt. Auf einigen dieser dunklen Flecken kann man positive Strahlen sehen, die in radialen Richtungen ungefähr bis zum Figurenzentrum gehen. Tabelle VII zeigt einige Dimensionen und Versuchsumstände.

### Positive Entladungsfiguren.

Die beiden positiven, durch die Ebonitplatte erhaltenen Entladungsfiguren haben eine unregelmäßige Kontur. Die mit kaltem Gleitpol erhaltene Figur besteht nur aus hellen Punkten und kleinen Flecken. Die mit glühendem Gleitpol erhaltene Figur besteht in ihrer Mitte auch aus Punkten und Flecken, welche an ihrem Rande allmählich in kurze positive Strahlen und kleine positive Sterne übergehen. Die Dimensionen und Versuchsumstände zeigt ebenfalls Tabelle VII.

Tabelle VII.

Heizstromstärke 2,5 Amp., Temperatur etwa 790°

| $E$[2]) | $R_k$ | $R_h$ | $R_k/R_h$ |
|---|---|---|---|
| | | Negative Figur | |
| 17,4 | 9,5 | 6,1 | 1,55 |
| 32,7 | 32,8 | 26,9 | 1,22 |
| 32,7 | 24,3 | 20,1 | 1,21 |
| 32,7 | 16,3 | 15,0 | 1,08 |
| 32,7 | | 17,6 | |
| | | Mittel | 1,25 |
| | | Positive Figur | |
| 17,4 | 24,7 | 34,0 | 0,73 |
| 32,7 | 26,6 | 23,5 | 1,13 |

### Zusammenfassung.

Die mittels glühenden Gleitpols erhaltene negative Figur unterscheidet sich in Form und Dimensionen von der gewöhnlichen negativen Figur. Erstere besteht (Spannung bis 20 KV., Temperatur bis 600°) nur aus Polbüscheln, während letztere Polbüschel und Ladungskanäle, Zwischen- und Endbüschel hat. Bei kleinerer

1) Diese „dunklen Funken" hat Metzner (Ber. d. deutsch. Phys. Gesellsch. 13, 612, 1911) untersucht; er fand ähnliche „dunkle Funken" auch auf Abbildungen von Blümel. (Blümel, Wissensch.-Beilage z. Jahresber. der 7. städt. Realschule z. Berlin 1898. „Über elektrische Entladungsfiguren auf photographischen Platten").

1) Etwas Ähnliches zeigen einige Figuren von S. Mikola, loc. cit. Fig. 7 u. 14.

2) Berechnet aus der Funkenlänge.

Spannung können beide Figuren nur aus ellipsenförmigen Polbüscheln bestehen. Die gewöhnliche negative Figur hat größeren Flächeninhalt als die mit glühendem Gleitpol erhaltene; diese hat aber größeren Polbüschelradius. Die Differenz $r_k - r_k$ der Polbüschelradien ist im Mittel gleich 1 mm. Die Form und Strukturveränderung begann schon bei 230° Gleitpoltemperatur.

Die positiven, mittels kalten und glühenden Gleitpols erhaltenen Entladungsfiguren sind in Form und Struktur beinahe gleich; aber verschieden in den Dimensionen. Die letzteren haben etwas weniger Zweige und sind kleiner als die ersteren, mittels kalten Gleitpols erhaltenen. Die Differenz zwischen den Radien der beiden positiven Figuren ist im Mittel gleich 2,5 mm.

Die mit kaltem und mit glühendem Gleitpol durch eine Ebonitplatte hindurch erhaltenen negativen Figuren unterscheiden sich in Form, Dimensionen und Struktur annähernd so, wie die ohne Ebonitzwischenplatte erhaltenen Figuren.

Die positiven, gleichzeitig mittels kalten und glühenden Gleitpols durch eine Ebonitplatte hindurch erhaltenen Figuren unterscheiden sich in der Struktur.

Die elektrischen Entladungsfiguren werden durch die Elektronen bedingt, die aus dem Gleitpol austreten.

Die Erhitzung des Gleitpols begünstigt den Elektronenaustritt und darum wirkt sie auf die negativen Polbüschel wie eine Potentialvergrößerung. Diese scheinbare Potentialvergrößerung ist bei meinen Versuchsumständen gleich etwa 3,0 K.V. Die Erhitzung des Gleitpols wirkt auf positive Figuren wie eine Spannungsverminderung. Diese scheinbare Potentialverminderung ist bei meinen Versuchsumständen gleich etwa 1,5 K.V.

Die Arbeit ist im Physikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Tiflis im vorigen Wintersemester gemacht worden.

München, 25. September 1924.

(Eingegangen 2. Oktober 1924.)

## Die Geschwindigkeit des Schalles in der Atmosphäre.

Von B. Gutenberg.

In einer soeben erschienenen Veröffentlichung hat G. Angenheister[1]) eine Reihe von Beobachtungen über die Zeiten zusammengestellt, welche die Schallwellen zum Durchlaufen der Strecke Schallquelle—Beobachtungsort gebrauchen. Während die Zeiten für das „Gebiet normaler Hörbarkeit" den für die direkten Schallwellen in den untersten Luftschichten berechneten Werten gut entsprechen, fehlt noch eine Erklärung für das Zustandekommen der Zone anormaler Hörbarkeit, die mit von Fall zu Fall wechselnder Distanz in rund 200 km Entfernung von der Schallquelle beginnt, dicht hinter dem Anfange ein starkes Schallmaximum zeigt und sich bis in etwa 300 km Entfernung erstreckt. Zwischen beiden Schallzonen liegt die Zone des Schweigens. Die Zone anormaler Hörbarkeit ist nur selten rund um die Schallquelle zu verfolgen, meist tritt sie nur auf einer Seite auf, und zwar wie A. Wegener[1]) zeigte, dem wir einen vorzüglichen Überblick über die Beobachtungstatsachen verdanken, in Westeuropa und in Japan im Winter meist auf der Ostseite, im Sommer auf der Westseite der Schallquelle.

Die beobachteten Laufzeiten der Schallwellen nach der Zone anormaler Hörbarkeit, mit der wir uns nunmehr beschäftigen wollen, sind um über 100 Sekunden größer als sich für direkte Wellen längs der Erdoberfläche ergibt. Es folgt, daß sie über die Grenze der Stratosphäre, die wir in 10 km Höhe annehmen wollen, hinausgelangt sein müssen. Es ergibt sich weiter, daß die Kurve fast parallel zur Kurve für konstante Geschwindigkeit $V_0$ am Erdboden verläuft. Da die zu untersuchende Laufzeitkurve nach Gleichung (1) nicht steiler als jene verlaufen kann, läßt sich trotz der Streuung der Punkte eine angenäherte mittlere Laufzeitkurve zeichnen, deren Werte aus Tabelle I entnommen werden können. ($\Delta$ = Herdentfernung, $t$ = Laufzeit der Welle). Zwischen dem Einfallswinkel $i_0$ der Welle an der Erdoberfläche und $\Delta$, $t$, und der Schallgeschwindigkeit $V_0$ am Boden besteht die Beziehung

$$\sin i_0 = V_0 \cdot \frac{dt}{d\Delta}. \qquad (1)$$

Zwischen $i_0$, $V_0$ sowie den entsprechenden Werten in beliebiger Höhe gilt angenähert

$$\sin i : \sin i_0 = V : V_0. \qquad (2)$$

Ferner ist die Laufzeit $t$ und die Längenprojektion $\Delta$ der Schallbahn auf die Erdoberfläche unter Vernachlässigung der Erdkrümmung für das Intervall zwischen den Höhen $h_1$ und $h_2$ zu finden aus

$$\Delta = \int_{h_1}^{h_2} \operatorname{tg} i \, dh, \quad t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{V \cos i} dh. \qquad (3)$$

1) Zeitschr. f. Geophysik 1, 314, 1925.

1) Zeitschr. f. Geophysik 1, 297, 1925.

Tabelle I.

| $\Delta$ km | $t$ sec | $i_0$ | $\sin(i_S)_0$ | $2\,\Delta_T$ km | $2\,t_T$ sec | $\Delta_S$ km | $t_S$ sec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 700 | 76° | 0,84 | 46 | 161 | 154 | 519 |
| 250 | 865 | 64° | 0,78 | 31 | 118 | 219 | 747 |
| 300 | 1000 | 54° | 0,71 | 23 | 97 | 277 | 903 |

Tabelle II.

| $h$ km | 10—35 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ m/sec | 294 | 340 | 360 | 380 | 400 |

Tabelle III.

| $i_0$ | 86 | 82 | 80 | 78 | 76 | 70 | 64 | 54 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ km | 202 | 193 | 192 | 195 | 200 | 225 | 250 | 300 |
| $t$ sec | 695 | 680 | 680 | 690 | 705 | 790 | 860 | 1000 |

$V$ können wir zwischen dem Erdboden und der Stratosphäre berechnen. Die Zusammensetzung der Luft ändert sich in diesem Gebiete nach den Untersuchungen in erster Annäherung nicht, die Temperaturabnahme ist im Mittel bekannt, und es ist ($T$ = absolute Temperatur):

$$V = 20\sqrt{T}. \qquad (4)$$

Gleichung (4) gibt $V$ als Funktion der Höhe bis zu 10 km ($T = 217°$), Gleichung (2) dann $i$ ($h$) und dann die Gleichungen (3) $\Delta$ ($h$) und $t$ ($h$).

Jede Schallbahn setzt sich zusammen aus zwei gleichen uns nun bekannten Stücken in der Troposphäre bis 10 km ($\Delta_T$ und $t_T$) und einem Stück in der Stratosphäre ($\Delta_S$ und $t_S$). Es ist für die ganze Schallbahn ($\Delta$, $t$):

$$\Delta = 2\Delta_T + \Delta_S, \quad t = 2t_T + t_S, \qquad (5)$$

wobei der Einfallswinkel an der Grenze der Stratosphäre den Zusammenhang zwischen den $T$- und $S$-Werten liefert. Da wir $\Delta$ und $t$ aus der beobachteten Laufzeitkurve kennen und $\Delta_T$ sowie $t_T$ berechnet haben, liefern uns die Gleichungen (5) zusammengehörige Werte von $\Delta_S$ und $t_S$, d. h. die Laufzeitkurve für die Stratosphäre. Da außerdem die Einfallswinkel der Schallwellen an der Stratosphärengrenze bekannt sind, läßt sich nach der entsprechend abgeänderten Wiechert-Herglotzschen Methode[1]) die Schallwellengeschwindigkeit in der Stratosphäre finden. Dabei muß der Beginn der $\sin i_s$-Kurve und der Laufzeitkurve extrapoliert werden (in Tabelle I von $\Delta_s = 0$ bis $\Delta_s = 154$ km). Diese Extrapolation kann aber nicht willkürlich ausgeführt werden, da Gleichung (1) entsprechend für die Stratosphärengrenze gilt. Als erste Annäherung wurden beide Kurven glatt zum Nullpunkt durchgeführt, doch müssen dann die Laufzeiten der Schallwellen für größeres $\Delta s$ etwas kürzer sein, als in Tabelle I angenommen war. Diese Veränderungen der ursprünglich angenommenen Laufzeitkurve liegen innerhalb des möglichen Verlaufes. In Tabelle I sind für einige Einfallswinkel die verschiedenen vorkommenden Größen angegeben. Fig. 1 zeigt die Laufzeitkurve und $\sin(i_S)_0$ als Funktion von $\Delta_S$ für die Stratosphäre, Fig. 2 die sich ergebenden Schallwellengeschwindigkeiten. Hierbei wäre es möglich, daß die Ursache, welche das Ansteigen der Werte in der Stratosphäre veranlaßt, bereits in den obersten Schichten der Troposphäre etwas höhere Werte von $V$ zur Folge hat, oder daß die Schallgeschwindigkeit in den untersten Schichten des Stratosphäre langsamer ansteigt, wie überhaupt die ganze Untersuchung mehr qualitative wie quantitative Bedeutung hat.

Berechnet man nun die Laufzeitkurve für größere Werte $i_0$ als 76°, so ergibt sich, daß zunächst $2\,\Delta_T$ etwa gerade so schnell, dann schneller wächst als $\Delta_S$ abnimmt. $\Delta$ erreicht etwa für $i = 82°$ ein Minimum bei wenig unter $\Delta = 200$ km. Dort liegt der Brennpunkt der Schallwellen, der in der anormalen Zone durch eine große Intensität auffällt. Da $i_0$ dort sehr groß ist, genügt (neben Windwirkung) eine nur wenig höhere Temperatur an der Beobachtungsstelle als an der Schallquelle, daß die Wellen am Brennpunkt oberhalb der Erdoberfläche in die Atmosphäre zurücklaufen, ohne erstere zu erreichen. Da im Sommer bei uns meist Temperatur-

1) Diese Zeitschr. 11, 294, 1910.

gefälle nach Westen, im Winter nach Osten vorliegt, wird die Ausbildung der anormalen Zone im ersten Fall im Osten, im zweiten im Westen den Beobachtungen entsprechend durch

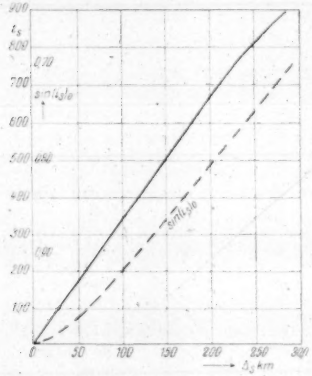



Fig. 1.

die Temperatur erschwert und bei stärkeren Temperaturdifferenzen verhindert.

Woher die hohe Schallgeschwindigkeit in der Stratosphäre kommt, ist schwer zu sagen. Nach den Beobachtungen ist die Temperatur zwischen 10 und 20 km, vielleicht sogar bis

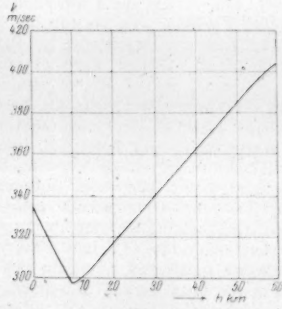



Fig. 2.

30 km Höhe konstant etwa $-50^0$. Es ist in diesem Falle $V^2 =$ etwa $116 : \delta_0$, wo $\delta_0$ die Dichte des dort befindlichen Gases bei $0^0$ und 760 mm Druck ist, d. h. in der Höhe müßte der Anteil der leichten Gase stark steigen. Andererseits hat A. Wegener (l. c.) darauf hingewiesen, daß in dieser Höhe die Laplacesche Schallformel möglicherweise nicht mehr gilt. Das müßte erst untersucht werden. Die oben abgeleiteten Schallgeschwindigkeiten werden jedoch hierdurch nicht beeinflußt.

Nachtrag bei der Korrektur: Die vorstehenden Ergebnisse wurden auf der Tagung der Deutschen geophysikalischen Gesellschaft in Göttingen am 7. Dezember vorgetragen. Ebenda berichtete E. Wiechert über gleichlaufende Untersuchungen. Er hat nach Probieren verschiedener Annahmen gefunden, daß die beste Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung eintritt, wenn man bis 30 km Höhe konstante Schallgeschwindigkeit annimmt, dann schnellen Anstieg, dann wieder Konstanz bis 38 km Höhe, dann langsameren Anstieg, und zwar war die zweite Unstetigkeit zur Erklärung der Brennlinie nötig. In einer demnächst in der Zeitschrift für Geophysik erscheinenden Darstellung beabsichtige ich jedoch zu zeigen, daß auch bei erst konstanter und dann zunehmender Schallgeschwindigkeit in der Stratosphäre die angegebene Methode anwendbar bleibt und zu qualitativ ähnlichen Ergebnissen führt wie oben angegeben. Nimmt man z. B. die Schallgeschwindigkeit bis 35 km Höhe konstant an — es kommt dies auf eine andere Extrapolation der $\Delta_s$-Kurve zwischen $\Delta_s = 0$ und $\Delta_s = 154$ km hinaus — so ergeben sich unter Anwendung der Methode auf die Schicht in 35 km Höhe die in Tabelle II angegebene Geschwindigkeitsverteilung und die in Tabelle III angegebenen Laufzeiten. Welche Werte den mittleren Verhältnissen entsprechen — vermutlich eine Kurve zwischen Tabelle II und Fig. 2 — kann erst auf Grund zahlreicherer Beobachtungen unter bekannten meteorologischen Bedingungen festgestellt werden, da diese das Ergebnis stark beeinflussen. Wie erwähnt, handelt es sich zunächst nur um ein qualitatives Bild der Erscheinung.

Darmstadt, 30. November 1925.

(Eingegangen 1. Dezember 1925.)

## Einige Vorlesungsversuche mit der Glimmlampe als Tongenerator.

(Nach einem Vortrag, gehalten auf der Tagung des Gauverbandes Rheinland der deutschen physikalischen Gesellschaft am 28. November 1925.)

Von R. Mecke und A. Lambertz.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn.)

Es ist bereits des öfteren darauf hingewiesen worden, daß die Neonglimmlampe im

stände ist, niederfrequente Schwingungen zu erzeugen, und damit als bequemer Tongenerator für verschiedene Zwecke in Betracht kommt. Das Grundphänomen selbst ist allerdings schon in alter Zeit[1]) bei Geißlerröhren, oder vielmehr bei allen elektrischen Entladungsformen, die eine fallende Charakteristik besitzen, bemerkt und untersucht worden. Die Tatsache aber, daß die Betriebsspannung einer Glimmentladung durch Verwendung von Neongas unter 200 V. herabgedrückt werden kann, hat dieser Erscheinung neue Anwendungsmöglichkeiten eröffnet. Geffken und Richter[2]) haben kürzlich gezeigt, wie man mit der Glimmlampe als Tongenerator nach einer Substitutionsmethode durch Tonvergleich Kapazitäten beliebiger Größenordnung und hohe Widerstände messen kann. Aber auch in die Vorlesungs- und Unterrichtspraxis dürfte diese Verwendungsmöglichkeit der Glimmlampe ihren Eingang finden, um so mehr, als die erforderlichen Hilfsmittel die denkbar einfachsten sind: Glimmlampe, Silitstab, Drehkondensator von etwa 2000 cm, Kopfhörer oder Lautsprecher, für größere Räume event. noch ein Niederfrequenzverstärker und eine Verstärkerröhre, also alles Dinge, die in der heutigen Zeit des Rundfunks schon fast zu den Gegenständen des täglichen Bedarfes zu rechnen sind. Nur die zur Erzeugung der Schwingung erforderliche Gleichspannung von 200 V. dürfte nicht in allen Fällen vorhanden sein, doch kann man sich hier leicht mit zwei hintereinandergeschalteten Anodenbatterien behelfen, da der Stromverbrauch der Lampe minimal ist und 1 bis 2 m Amp. kaum überschreiten dürfte. Es erscheint daher nicht ohne Interesse, in zwangloser Reihenfolge einige Vorlesungsversuche mitzuteilen, die mit der Glimmlampe besonders einfach und eindrucksvoll sich gestalten, um so mehr, als damit gleichzeitig auch das Ohr mit zur Beobachtung und Messung physikalischer Vorgänge herangezogen wird.

Die generelle Versuchsanordnung ist dabei die folgende: Eine Kapazität $C$ wird durch eine Gleichspannung $V_0$ über einen Ohmschen Widerstand in der Größenordnung $10^6$ Ohm (Silitstab) langsam aufgeladen. Parallel zur Kapazität liegt die Glimmlampe. Infolgedessen lädt sich der Kondensator nur bis zur Zündspannung $V_Z$ der Lampe (etwa 180 V.) auf, dann schließt die Lampe den Kondensator kurz und entlädt ihn bis zu ihrer Löschspannung $V_L$ (etwa 160 V.), worauf sich der Vorgang wiederholt (Fig. 2).

1) C. Gassiot, Proc. Roy. Soc. **12**, 329, 1863; W. Hittorf, Wied. Ann. **7**, 566, 1879; R. Righi, Rendiconti dell'accademica delle scienze di Bologna, S. 188, 1902.

2) H. Geffken u. H. Richter, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 511, 1924.

Schaltet man also in den Lade- oder in den Entladestromkreis ein Telephon (event. unter Zwischenschaltung eines Niederfrequenzverstärkers) ein, so hört man die periodisch erfolgen-

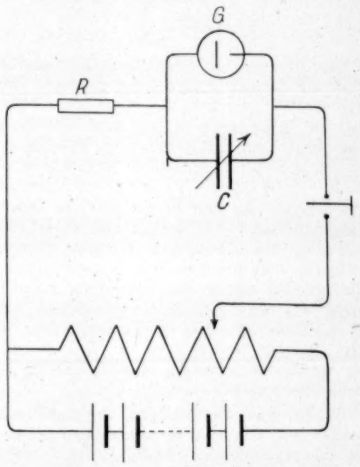



Fig. 1.

den Auf- und Entladungen des Kondensators als Ton. Unter gewissen vereinfachten Voraussetzungen, daß nämlich Zünd- und Löschspannung der Lampe wirkliche Lampenkonstanten (s. u.) sind und daß ferner ihr Widerstand näherungs-

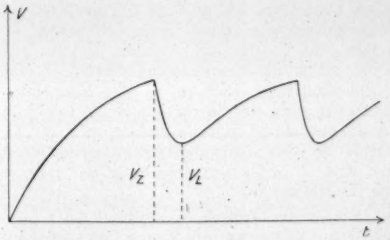



Fig. 2.

weise als Ohmscher Widerstand aufgefaßt werden kann, läßt sich dann auch leicht die Frequenz dieses Tones angeben. Der (aperiodische) Spannungsverlauf bei der Auf- bzw. Entladung eines Kondensators über einen Ohmschen Widerstand ist bekanntlich gegeben durch

$$V_t = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \text{ bzw. } V_t = Ve^{-\frac{t}{RC}}. \quad (1)$$

Somit erhält man für die Ladezeit den Wert

$$t_A = RC \ln \frac{V_0 - V_L}{V_0 - V_Z} \qquad (2)$$

und für die Entladezeit entsprechend

$$t_E = R'C \ln \frac{V_Z}{V_L}. \qquad (3)$$

Die Frequenz ist dann durch den reziproken Wert der Summe beider Zeiten gegeben. Mißt man den Widerstand in Megohm ($10^6$), die Kapazität in Mikrofarad ($9 \cdot 10^5$ cm) und nimmt man ferner den natürlichen Log., so erhält man die Zeiten direkt in Sekunden. Man hat es also in der Hand, durch Variation der angelegten Ladespannung und Kapazität die Schwingungsfrequenzen sehr schnell und sicher innerhalb sehr weiter Grenzen zu variieren. (Bemerkt sei hierzu, daß diejenigen Lampen am sichersten arbeiten, bei denen das Glimmlicht möglichst wenig auf der Kathode herumwandern kann, die Kathode also nur aus einem kurzen Zuführungsdraht besteht, wie z. B. bei einigen der zu Reklamezwecken vielfach verwendeten Buchstabenlampen.)

Wählt man als Kapazität Telephonkondensatoren von 1 bis 2 $\mu$ F, so leuchtet die Lampe nur in regelmäßigen Abständen von einigen Sekunden auf; nimmt man kleinere Drehkondensatoren, so geht die Tonhöhe schnell bis zur Hörbarkeitsgrenze (ca. 16000) herauf. Um die Ladespannung verändern zu können, legt man die Gleichspannung an ein Potentiometer und greift durch den Schiebewiderstand die erforderlichen Spannungen ab. (Da nur Spannungen bis zur Zündspannung herab in Betracht kommen, kann man auch den größten Teil des Potentiometerwiderstandes durch eine Glühlampe ersetzen und nur für die restlichen 200 bis 300 Ohm einen Schiebewiderstand benutzen. Bei Anodenbatterien wird man die Spannungsänderung wohl nur durch Umstöpseln bewirken, event. nur einige hinzugeschaltete größere Elemente an den Potentiometerwiderstand legen, um eine zu große Beanspruchung der Batterie zu vermeiden.)

Die große Empfindlichkeit der Tonschwingungen gegen Spannungsschwankungen läßt sich nun besonders eindrucksvoll demonstrieren, wenn die Glimmlampe direkt am Lichtnetz liegt. Dann genügt schon der geringe Spannungsabfall, der durch Einschalten der Beleuchtungslampen im Vorführungsraum entsteht, um sehr merkbare Tonänderungen hervorzurufen.

Etwas einfacher liegen die Verhältnisse, wenn man die Ladestromstärke nicht durch Einschalten eines Silitwiderstandes sondern durch Verwendung von Sättigungsströmen einer Glühkathodenröhre, etwa einer Verstärkerröhre, begrenzt. Man schließt zu diesem Zwecke Gitter und Anode einer Verstärkerröhre kurz und schaltet die Strecke Gitter—Heizfaden an die Stelle des Silitwiderstandes. Auf die richtige Polung ist dabei wegen der Gleichrichterwirkung zu achten. Dann ist bei den in Betracht kommenden Spannungen stets der Sättigungsstrom erreicht und man kann denselben durch Änderung der Heizstromstärke beliebig variieren. Die Aufladungszeiten sind jetzt nach einer aus der Iontometrie wohlbekannten Formel gegeben durch

$$t_A = C \cdot \frac{V_Z - V_L}{i}, \qquad (4)$$

also unabhängig von der angelegten Ladespannung, solange man nur oberhalb der Zündspannung der Glimmlampe bleibt. Im übrigen bleibt die Schaltung bestehen.

Wir kommen nun zu den einzelnen Versuchen. Zunächst läßt sich zeigen, daß die ganze Anordnung äußerst empfindlich ist gegenüber Isolationsfehlern. Das Berühren irgendeiner Stelle zwischen Widerstand und Glimmstrecke mit dem Finger läßt wegen der damit verbundenen Verzögerung der Aufladezeit den Ton sofort heruntergehen, eine Erscheinung, die Geffken und Richter[1]) in etwas anderer Form dazu benutzten, um die Isolierfähigkeit von Kondensatoren zu messen.

Widerstandsänderung durch Temperatur. Der Widerstand des Silitstabes besitzt bekanntlich einen sehr großen negativen Temperaturkoeffizienten, d. h. er nimmt mit wachsender Temperatur ab. Kommt man also mit einem Bunsenbrenner dem Silitstab nahe, so schnellt der Ton sofort in die Höhe und geht nach Wegnahme des Brenners langsam wieder zurück.

Leitfähigkeit von Gasen. Die Leitfähigkeit von Flammengasen zeigt man in der Regel mit dem Elektrometer, was aber, sobald es darauf ankommt, quantitative Unterschiede in der Leitfähigkeit aufzuweisen, stets einige Schwierigkeiten macht. Mit der Glimmlampe gelingen die Versuche jedoch sehr gut. Man ersetzt dazu einfach den Silitstab durch zwei gegenseitig isolierte Streifen aus Eisenblech (etwa $5 \times 12$ cm), die senkrecht und zueinander parallel stehen, ähnlich wie bei einem Plattenkondensator mit 1 bis 2 cm Abstand. Da der Ladestromkreis unterbrochen ist, können selbstverständlich keine Schwingungen entstehen. Langsame periodische Entladungen der Lampe setzen aber sofort ein, wenn man zwischen die Blech-

1) l. c.

streifen einen Bunsenbrenner hält, so daß die heißen Flammengase beide Blechstreifen berühren, und die Entladungsfolge steigert sich schnell bis zur Tonfrequenz, wenn jetzt etwas Kochsalz in die Flamme gebracht wird. Auch zwischen leuchtender und nichtleuchtender Bunsenflamme läßt sich so schon ein Unterschied in der Leitfähigkeit zeigen.

Wie schon gesagt, kann die Kapazität innerhalb sehr weiter Grenzen variiert werden, ohne daß die Fähigkeit der Glimmlampe, hörbare Tonfrequenzen zu erzeugen, dabei verloren geht. Schaltet man also den Kondensator aus dem Schwingungskreis ganz aus, so wird man erstaunt sein, wie groß noch die Restkapazität der Zuleitungsdrähte[1]) und der Lampe ist. Selbst wenn man die Zuleitungsdrähte so kurz wählt, daß in praxi nur die Eigenkapazität der Glimmlampe in Betracht kommt (von der Größenordnung einiger Zentimeter, deren größter Anteil auf den Lampensockel entfällt), so wird man immer noch durch geeignete Wahl des Widerstandes (bzw. der Heizstromstärke) und der Ladespannung deutlich wahrnehmbare Schwingungen erzielen können. Ihre Intensität ist selbstverständlich geringer geworden. Diese Empfindlichkeit der Anordnung auch noch kleinen Kapazitäten gegenüber gestattet es nun, eine Reihe von Versuchen aus der Elektrostatik mit der tönenden Glimmlampe vorzuführen, so z. B. den Nachweis der Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten einer Reihe von Dielectricis. Man braucht nur den bisher benutzten Drehkondensator durch einen einfachen Plattenkondensator, dessen beide Platten sich gegeneinander verschieben lassen, zu ersetzen und dann den Ton auf eine mittlere Frequenzlage einzuregulieren. Beim Nähern der Platten wächst die Tonhöhe, beim Entfernen sinkt sie. Führt man aber verschiedene Dielektrika (Glas, Hartgummi u. a.) zwischen die Platten ein, so steigt die Kapazität und damit auch die Tonhöhe.

Den Plattenkondensator kann man bekanntlich auch dazu benutzen, kleine Längenänderungen wahrnehmbar zu machen, wie sie z. B. bei der Ausdehnung fester Körper durch Temperaturerhöhung auftreten. Klemmt man nämlich einen dünnen Eisenstab mit dem einen Ende an einem Stativ fest, und preßt ihn, wie Fig. 3 zeigt, leicht gegen einen der stets etwas federnden (isolierenden) Plattenhalter des Kondensators, so bewirkt eine Verlängerung des Stabes eine der Hebelübertragung entsprechende Verringerung des Abstandes der beiden Kondensatorplatten. Erwärmt man also mittels eines Bunsenbrenners den Stab, so kann man die dadurch hervorgerufene thermische Ausdehnung an einem Höherwerden des Tones erkennen.

Die Energien, auf die ein gutes Telephon noch anzusprechen vermag, sind äußerst gering, und so weist denn auch bei elektrischen Schwingungen jeder Kopfhörer oder Lautsprecher eine sehr große Empfindlichkeit gegenüber kapazitiven Kopplungen auf, eine Erscheinung, die bei Radioapparaten und Verstärkern nur zu oft als sehr störend empfunden wird. Auch mit der Glimmlampe läßt sich dieser geringe Energiebedarf eines Telephons demonstrieren. Schaltet man nämlich den Lautsprecher gänzlich aus, verbindet dann nur den

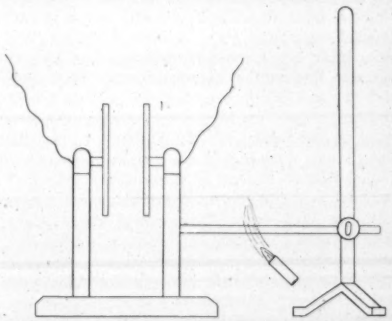


Fig. 3.

einen Zuleitungsdraht zum Lautsprecher mit der Erde oder einem Pol der Spannungsbatterie, nimmt den anderen Zuleitungsdraht selbst in die Hand, so wirkt der Körper jetzt als Kapazität und man hört sofort im Lautsprecher, ohne daß derselbe galvanisch mit dem Schwingungskreise verbunden ist, nur durch kapazitive Kopplung den Schwingungston, wenn man sich dem Schwingungskreise bis auf einige Schritte nähert. Nicht mehr mit dem Lautsprecher, immerhin aber noch mit einen gutem Kopfhörer (ohne Verstärker!) läßt sich zeigen, daß jede größere Metallmasse in einem Umkreise von mehreren Metern stets noch mit dem Schwingungskreise kapazitiv gekoppelt ist, so daß es überhaupt schwer sein dürfte, im Kopfhörer völlige Tonlosigkeit in der Nähe der Glimmlampe zu erzielen. Verwendung eines Verstärkers vergrößert selbstverständlich den Hörbarkeitsradius. Bei der Beurteilung dieser Empfindlichkeit des Telephons ist noch zu berücksichtigen, daß durch die Glimmlampe nur ein Strom von einigen Zehntel Milliampere fließt.

1) So hatte z. B. eine zusammengedrillte Doppelschnur eine Kapazität von 110 cm pro Meter, die Restkapazitäten der Drehkondensatoren liegen etwa bei 50 bis 100 cm.

Photoeffekt. Der eine von uns[1]) hat bereits früher darauf hingewiesen, daß die Glimmlampe zum Nachweis des Photoeffektes benutzt werden kann. Derselbe Versuch läßt sich auch mit der schwingenden Glimmlampe ausführen.

Durch die Belichtung wird ja die Zündspannung der Lampe herabgesetzt, die Leitfähigkeit durch die vermehrte Ionisation entsprechend vergrößert. Zum Nachweis kann man daher die in Fig. 1 wiedergegebene Versuchsanordnung ohne weiteres verwenden. Belichtet man nämlich die Glimmlampe, und zwar die Kathode derselben mit dem intensiven Lichte einer Bogenlampe, so geht aus den erwähnten Gründen der Ton in die Höhe. (Um jede Spannungsschwankung, die evt. beim Ein- und Ausschalten der Bogenlampe auftreten könnte, zu vermeiden, blendet man das Licht derselben nur durch einen Pappschirm ab.) Selbstverständlich läßt sich auch die Intensitätsabnahme des Lichtes mit der Entfernung demonstrieren. Beim Annähern und Entfernen der Lichtquelle steigt und sinkt der Ton in gleichen Maße. Ebenso leicht ist die Selektivität des Effektes zu zeigen: Vorschalten eines blauen oder selbst noch eines dunkelvioletten Filters schwächt den Effekt fast gar nicht, helles gelbes Glas dagegen schon merklich und rotes Glas bringt den Effekt gänzlich zum Verschwinden. Eine etwas andere Ausführungsform des Versuches, die, wie wir erst nachträglich feststellten, bereits von v. Baeyer und Kutzner[2]) angegeben worden ist, ist die folgende: Man reguliert die Ladespannung durch das Potentiometer so ein, daß sie im Dunkeln gerade unterhalb der Zündspannung der Glimmlampe liegt, daß Schwingungen also nicht zustande kommen können. Belichtet man nun wieder die Kathode, so treten unregelmäßige Zündungen der Lampe auf, die im Telephon gut hörbar sind und die bei Lichtabschluß sofort wieder aufhören. Man hört also gewissermaßen hier das lichtelektrische Auslösen von einzelnen Elektronen oder wahrscheinlicher von einzelnen Gruppen von Photoelektronen. Auf jeden Fall deutet dieser Versuch darauf hin, daß der Zündungsvorgang der Lampe statistischen Gesetzen unterworfen ist. Auch bei dieser Anordnung des Versuches gelingt der Nachweis der Selektivität des Photoeffektes leicht. Nach Angaben von v. Baeyer und Kutzner wirken radioaktive Präparate und Röntgenstrahlen ähnlich.

Zum Schlusse seien noch zwei Versuche aus der Akustik erwähnt. Nach der in Fig. 4 angegebenen Schaltung gelingt es, zwei verschiedene Tonschwingungen im Telephon übereinander zu lagern, ohne daß sie sich dabei gegenseitig in ihren Frequenzen beeinflussen. Hierbei ist es selbstverständlich gleichgültig, ob man einen Silitstab oder eine Elektronenröhre als Aufladewiderstand benutzt. Stimmt man also beide Schwingungskreise mit Hilfe der Drehkondensatoren auf nahezu gleiche Tonhöhe ab, so kann man im Telephon deutlich Schwebungen hören. Man wird aber bemerken, daß bei wenig Schwebungen pro Sekunde die Anzahl

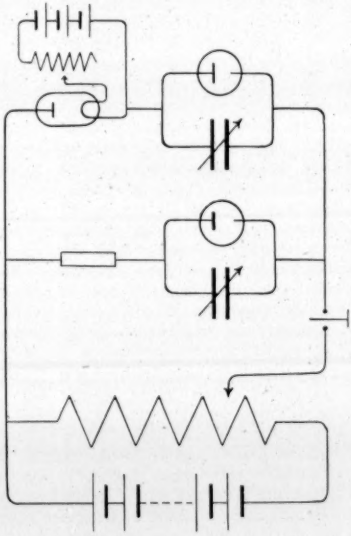


Fig. 4.

derselben etwas schwankt, der Ton also nicht gerade übermäßig konstant ist. Die Spannungskurve (Fig. 2) eines Schwingungskreises läßt nun sofort erkennen, daß die Töne auch nicht aus reinen Sinusschwingungen bestehen können, sondern Oberschwingungen beträchtlicher Intensität besitzen müssen. Dies ist in der Tat der Fall. Stimmt man nämlich die beiden Schwingungskreise auf Grundton und Oktave oder nächsthöhere Quinte ab, so hört man wieder deutlich Schwebungen. Man kann so leicht noch den dritten bis vierten Oberton der Schwingung nachweisen; auffallend ist, daß man dabei fast regelmäßig den Grundton schweben hört, nicht etwa den betreffenden, in Wirklichkeit mit dem Überlagerungston interferierenden Oberton. Auf eine Erscheinung sei bei dieser Ge-

1) A. Lambertz, Physik. Zeitschr. **26**, 254, 1925.
2) O. v. Baeyer u. W. Kutzner, Zeitschr. f. Phys. **21**, 46, 1924.

legenheit noch kurz hingewiesen. Nach den Schwingungsformeln (2) und (3) müßten sich für die entsprechenden Obertöne die Kapazitäten genau wie 1 : 2 : 3 . . . verhalten. Dies trifft jedoch nicht exakt zu, und zwar deshalb, weil die „dynamische" Zündspannung eine Abhängigkeit von der Frequenz besitzt. So ergab z. B. bei einer Versuchsreihe der geeichte Drehkondensator die Ablesungen 49°, 100°, 155° für die entsprechenden Obertöne.

Es macht in der Regel gewisse Schwierigkeiten, den Differenzton zweier Töne wirklich einwandfrei in einem größeren Raum vorzuführen, da die hierzu erforderlichen Schallquellen hoher Frequenz mit genügender Intensität schwer herzustellen sind und der dann entstehende Interferenzton, solange diese Schallquellen sich in der Tonhöhe nicht kontinuierlich verändern lassen, in der Regel auch eine ungeeignete Frequenz besitzt. Beide Übelstände sind bei dieser Versuchsanordnung vermieden worden. Stellt man also beide Schwingungskreise so ein, daß die Töne nahe an der oberen Hörbarkeitsgrenze liegen, aber noch deutlich wahrnehmbar bleiben, so hört man sehr deutlich neben den beiden hohen Tönen den viel tieferen Differenzton, dessen Frequenz sich auch durch Drehen eines der beiden Drehkondensatoren im gleichen Maße ändert.

Wir möchten hiermit die Auswahl der Vorlesungsversuche abschließen, mit deren Beschreibung keineswegs gemeint sein soll, daß nun unbedingt jeder dieser Versuche mit der Glimmlampe ausgeführt werden muß. Es geht selbstverständlich auch anders, wie wir auch gerne dahingestellt lassen möchten, ob die hier mitgeteilte Ausführungsform des Versuches immer die zweckmäßigste ist. Die Glimmlampe erfreut sich aber heute in der Experimentiertechnik einer großen Beliebtheit, was die vielen in letzter Zeit erfolgten Mitteilungen von Versuchen zur Genüge beweisen. An der einen oder anderen Stelle gelegentlich angewendet, dürfte sie deshalb als eine bei Vortragenden und Hörern gleich angenehme Neuerung der Ausführungsform eines Versuches empfunden werden. In diesem Sinne nur sollen die hier mitgeteilten Versuche eine Anregung zur Auffindung weiterer Anwendungsmöglichkeiten der Glimmlampe geben.

(Eingegangen 19. Dezember 1925.)

## Zur Demonstration des Magnuseffektes.

Von Franz P. Defregger.

Das einfachste Hilfsmittel zur Demonstration des Magnuseffektes an fallenden Körpern ist bekanntlich ein Hohlzylinder aus Papier[1]), der nach Prandtls Vorgang an den Enden mit überstehenden Scheiben ausgerüstet ist, so daß er die Form einer Spule bekommt. Wirft man einen derartigen Zylinder in irgendeiner Weise unter gleichzeitiger Erteilung eines möglichst starken Drehimpulses (z. B. indem man ihn in der Mitte mit Untergriff faßt, schräg nach vorn hochwirft und im Augenblick des Loslassens die Hand an seiner Unterseite rasch zurückzieht), so kann man die Abweichung seiner Flugbahn von der normalen Wurflinie meist deutlich erkennen. Aber abgesehen davon, daß das richtige Abwerfen eine gewisse Geschicklichkeit erfordert und daher leicht mehr oder weniger mißlingen kann, hat man es dabei selbst bei richtiger Ausführung nicht gerade mit einem glänzenden Demonstrationsversuch zu tun. Um nun einerseits das Mißlingen des Versuches mit Sicherheit zu vermeiden und andererseits den Effekt deutlicher in Erscheinung treten zu lassen, hat der Verfasser ein durch eine Feder angetriebenes Laufwerk konstruiert, das den mit einer hölzernen Achse versehenen Zylinder in horizontaler Lage in rasche Rotation versetzt und dann fallen läßt[2]). Man gewinnt damit den Vorteil, daß man, da äußerste Leichtigkeit des Zylinders wegen der höheren Umdrehungszahl nicht mehr in demselben Maße Erfordernis ist, die Scheiben am Rande mit Metallringen versteifen und gleichzeitig beschweren kann, wodurch das Trägheitsmoment des Zylinders so bedeutend erhöht wird, daß einerseits der erteilte Drehimpuls nicht durch die Luftreibung allzu rasch aufgezehrt wird, und andererseits die horizontale Achsenlage des Zylinders durch die Kreiselwirkung der Scheiben vollständig aufrecht erhalten wird, was mit leichten Scheiben oder gar ohne Scheiben nicht der Fall ist. Bei Anwendung dieser Abwurfvorrichtung tritt die noch ungewohnte Kraftwirkung des Magnuseffektes mit überraschender Deutlichkeit hervor. Die Bahn des Zylinders hat ungefähr den in Fig. 1 skizzierten Verlauf. Sie führt also nicht nur mit verhältnismäßig geringer Neigung abwärts, sondern weist sogar unter Umständen ansteigende Teile auf. Die Anzahl der Stufen ($P$, $R$, vgl. Fig. 1), in denen sich der Fall vollzieht, hängt natürlich, ebenso

1) Vgl. Prandtl, Magnuseffekt und Windkraftschiff in „Die Naturwissenschaften", 13. Jahrgang, S. 93 ff., 1925.

2) Der Apparat wird von den Physikalischen Werkstätten A-G., Göttingen, hergestellt, und unter der Bezeichnung „Magnus-Apparat" in den Handel gebracht.

wie die durchschnittliche Neigung der Bahn und die Fallzeit, von Gewicht, Trägheitsmoment und Umdrehungszahl des Zylinders ab. Bei Versuchen mit 2 m Fallhöhe war der horizontal zurückgelegte Weg im Maximum nahezu 5 m,

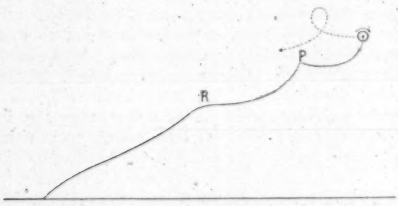



Fig. 1

die längste beobachtete Fallzeit etwa $3^1/_2$ Sekunden, während der nicht rotierende Zylinder dieselbe Höhe in etwa $^3/_4$ Sekunden durchfällt.

Die Handhabung des Apparates ist äußerst einfach: Man zieht die Feder auf, setzt den Zylinder in die Lager ein und löst durch Ziehen an einem Kettchen das Laufwerk aus. Dieses versetzt dann den Zylinder in Rotation, läßt ihn fallen und arretiert sich darauf selbst, so daß

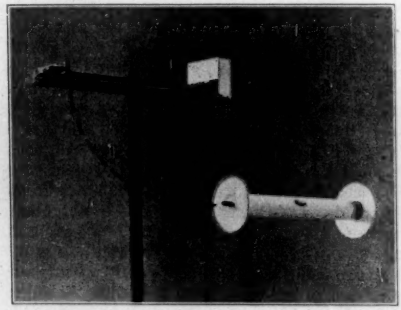


Fig. 2.

man den Versuch ohne erneutes Aufziehen mehrmals wiederholen kann.

Soll der Fall aus größerer Höhe erfolgen, so wird die Vorrichtung mittels einer dafür vorgesehenen Öse auf einen Besenstiel gesteckt und damit hochgehalten. Das Auslösen des Laufwerkes geschieht dann mit einer dünnen Schnur mit Haken, die man zur Verlängerung an das Abzugkettchen hängt. Die Fig. 2 zeigt den auf einem Stiel steckenden Apparat nebst Flugzylinder kurz nach dem Abwurf. Die von dem einen Achsenende durchlaufene Bahn ist punktiert angedeutet. Um einen Anhalt über den Maßstab der Abbildung zu geben, sei erwähnt, daß der Flugzylinder 220 mm lang ist.

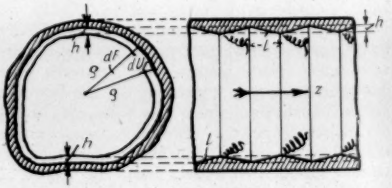
Erteilt man dem Zylinder durch Bewegen des ganzen Apparates im Augenblick des Abfallens einen geeigneten Impuls in horizontaler Richtung, so muß die Flugbahn, wie leicht einzusehen ist, eine Schleife bilden (in der Fig. 1 punktiert eingezeichnet). Um diesen Versuch zu erleichtern, ist an dem Laufwerk ein Knopf angebracht, mittels dessen man das Werk so umstellen kann, daß es den Zylinder nicht mehr selbsttätig abwirft und sich erst arretiert, nachdem man ihn mittels einer zweiten Schnur abgeworfen hat. Da nämlich in diesem Falle das Abwerfen möglichst genau in dem gewünschten Augenblick erfolgen soll, ist es vorteilhafter, es von Hand zu besorgen.

(Eingegangen 9. Januar 1926.)

## Die Wandrauhigkeit in der Strömungslehre.

Von H. Lorenz.

Bei langsamer Relativströmung einer Flüssigkeit längs einer festen Wand spielt deren Oberflächenbeschaffenheit keine Rolle, da die Unebenheiten von den an der Wand hinschleichenden Stromfäden eingehüllt und vom Gebiete der




rascheren Bewegung abgesperrt werden. Der Bewegungswiderstand ist in diesem Falle ausschließlich durch die reine Flüssigkeitsreibung bedingt, die mit einem als Zähigkeit bezeichneten Beiwerte $\mu$ dem Geschwindigkeitsgefälle normal zur Wand verhältnisgleich ist. Nach Überschreiten einer durch die sogenannte Reynoldssche kritische Zahl bestimmten Stromgeschwindigkeit bildet sich eine Grenzschicht als Träger des Geschwindigkeitsgefälles aus, deren Dicke mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Bei diesem turbulenten Vorgange werden die Stromfäden innerhalb der Grenzschicht an der Wandrauhigkeit teilweise zerrissen und in Wirbelballen aufgelöst, die in die Hauptströmung übertreten und sich mit dieser vermischen, wobei ihre durch

innere Reibung in Wärme übergeführte Drehwucht für die Strömung verloren geht.

Um den Einfluß der Wirbelbildung auf den Stromverlauf rechnerisch zu erfassen, denken wir uns die Wandrauhigkeit durch in bestimmten Abständen sich wiederholende, stetig ansteigende Rohrverengungen des Stromquerschnittes $F$ vom Umfang $U$ ersetzt. Bedeutet dann $h$ die mittlere Höhe der Verengung, so ändert sich die mittlere Stromgeschwindigkeit $w_0$ in $w$ so zwar, daß

$$w_0 F = (F - Uh)\, w,$$

$$w - w_0 = \frac{Uh}{F} w \qquad (1)$$

ist. Die Zunahme der Geschwindigkeit bedingt aber mit dem Raumgewicht $\gamma$ und der Erdbeschleunigung $g$ ein Druckgefälle in der Stromrichtung $z$ von

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt} = \frac{\gamma}{g} w \frac{dw}{dz}, \qquad (2)$$

worin wir auch unter Einführung der Anstieglänge der Rohrverengung nach (1) schreiben dürfen:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w - w_0}{l} = \frac{U}{F}\frac{h}{l} w \qquad (1a)$$

und damit an Stelle von (2) erhalten

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{g}\frac{U}{F}\frac{h}{l} w^2. \qquad (2a)$$

Das Verhältnis von $F : U$ bezeichnet man in der Technik als den hydraulischen oder Profilradius; richtiger wäre es, da mit dem Krümmungsarm $\varrho$ des Umfanges $2\,dF = \varrho\, dU$ ist, den Mittelwert

$$\frac{2F}{U} = r \qquad (3)$$

einzuführen, womit (2a) übergeht in:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{g}\frac{2}{r}\frac{h}{l} w^2 = \frac{4h}{l}\frac{\gamma}{2g}\frac{w^2}{r} = \lambda_0 \frac{\gamma}{2g}\frac{w^2}{r}. \qquad (2b)$$

Hierin ist

$$\lambda_0 = \frac{4h}{l} \qquad (4)$$

nichts anderes als die gesuchte Rauhigkeitsziffer, die sich auch für sehr große Reynoldssche Zahlen

$$R = \frac{\gamma w r}{\mu g} \qquad (5)$$

als Grenzwert des allgemeinen Faktors $\lambda$ in der Formel:

$$-\frac{dp}{dz} = \lambda \frac{\gamma}{2g}\frac{w^2}{r} \qquad (6)$$

ergibt[1]). Die Rauhigkeit einer Wand ist demnach nicht durch die absolute Höhe $h$ der Unebenheiten, sondern von deren Anstieg $h : l$ bedingt. Insbesondere kann man, da $\lambda_0$ schon eine Zahl ist, nicht von einer relativen Rauhigkeit $h : r$ sprechen, wie es wohl gelegentlich bei der Beurteilung von Modellversuchen geschehen ist, die man aus diesem Grunde in kleinerem Maßstabe mit einem Wandbaustoff von glätterer Oberfläche angestellt hat. Daraus dürfen sich wohl die bekannten Unstimmigkeiten der Schleppversuche von Schiffsmodellen erklären, die man z. T. wegen der leichteren Bearbeitung aus Paraffin statt aus demselben Blech wie die Haut der Schiffskörper anzufertigen pflegt. Auch Druckabfallversuche sind nur miteinander vergleichbar, wenn die benutzten Rohre trotz verschiedener Durchmesser aus demselben Baustoff und gleicher Oberflächenbeschaffenheit bestehen. Die Nichtbeobachtung dieser Forderung hat dann eine große Streuung der Versuchswerte von $\lambda$ zur Folge, die im Verein mit häufig unzweckmäßiger Anordnung der Schaubilder die Klärung des Turbulenzproblems so lange verzögert hat.

1) Lorenz, „Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr". Physik. Zeitschr. **26**. 557, 1925; sowie Ergänzungsheft „Technische Mechanik" der Zeitschr. d. Ver. d. Ingenieure 1925.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule.

(Eingegangen 25. Januar 1926.)

## Nachtrag zu der Notiz: „Über ein einfaches und sicheres Verfahren zur Abätzung dünnster Wollastondrähte" in Bd. 26, 913, 1925 dieser Zeitschrift.

Von Rud. Suhrmann u. K. Clusius.

Herr Prof. Waetzmann macht uns freundlichst darauf aufmerksam, daß er in der gemeinsamen mit Herrn J. Friese in der Zeitschr. f. Phys. **34**, 131, 1925 veröffentlichten Arbeit über „Absolute Temperaturmessung in stehenden Schallwellen" ein ähnliches Verfahren wie das oben beschriebene zur elektrolytischen Entfernung des Silbers unter Verwendung von Kaliumsilbercyanidlösung angewandt hat, da die verschiedenen Abätzverfahren keine einwandfreien Drähte ergaben. Wir bedauern, daß uns diese Notiz in der Arbeit der beiden Herren entgangen ist, und halten es übrigens für möglich, daß auch in der älteren Literatur gelegentlich ein ähnliches Verfahren bereits beschrieben worden ist, da ja bei der technischen Goldgewinnung in ganz entsprechender Weise das Auflösen von Gold in Cyankaliumlösung unter

Gegenwart von Luftsauerstoff nach den Gleichungen:

$$2\,Au + 4\,KCN + 2\,H_2O + O_2 \rightarrow 2\,Au(CN)_2K + 2\,KOH + H_2O_2$$

$$2\,Au + 4\,KCN + H_2O_2 \rightarrow 2\,Au(CN)_2K + 2\,KOH$$

im großen betrieben wird.

Wir glaubten aber, daß den Fachgenossen die Mitteilung des von uns angewandten Kunstgriffes zur Abätzung von Wollastondrähten willkommen sein würde, da, wie wir uns überzeugten, die elektrolytische Auflösung von Silber in Cyankaliumlösung unter der Einwirkung des Sauerstoffs in Physikerkreisen nicht allgemein bekannt ist. In E. v. Angerer, Technische Kunstgriffe z. B. ist nur das viel mühsamere Abätzen mittels der Salpetersäure erwähnt.

Physikal.-Chem. Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 1. Februar 1926.)

# BESPRECHUNGEN.

**M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre.** Gr.-8°. IX u. 375 S., 2. Auflage. Berlin, Julius Springer. 1925. M. 18.—, geb. M. 19.20.

Das Buch ist 1918 erschienen und 1919 im 20. Jahrg. dieser Zeitschrift, S. 382 von P. Bernays besprochen worden. Die vorliegende 2. Auflage unterscheidet sich von der ersten durch kleine Zusätze und die Weglassung minder wichtiger polemischer Ausführungen. Nur die Auseinandersetzung mit Kant ist beibehalten und die mit Mach erweitert worden.

Aus diesem letzteren Teil hebe ich eine bestimmte Stelle hervor, die für den Physiker, wie überhaupt jeden Naturforscher, der sich für die philosophischen Grundlagen seiner Wissenschaft interessiert, von großer Wichtigkeit ist: ich meine die Kritik, die Schlick an der Millschen Behandlung des Wirklichkeitsproblems übt. Der Satz von John Stuart Mill, daß „die Existenz einer Erscheinung nur ein anderes Wort sei für die Wahrnehmung derselben oder für die gefolgerte Möglichkeit, sie wahrzunehmen", ist für Schlick eine „Ungereimtheit". Denn: „Das Mögliche ist ja etwas, das unter gewissen Bedingungen zum Wirklichen wird, dessen Sein also von der ‚Wirklichkeit' gewisser Umstände abhängt. Es gibt mithin einen Zirkel, wenn man nun das Wirkliche seinerseits wieder durch das Mögliche bestimmen wollte". (Schlick, l. c.)

„Wie erläuterungsbedürftig ist nicht der Begriff der Möglichkeit in der Philosophie!" ruft Schlick aus. Aber J. St. Mill hat doch an jener von Schlick herangezogenen Stelle seiner „Logik" (Buch III, Kap. 24) gezeigt, daß dieser erläuterungsbedürftige Begriff der „Möglichkeit" für seinen Wirklichkeitsbegriff gar nicht nötig ist, wodurch auch der Einwand des logischen ‚Zirkels" fällt. In den folgenden Sätzen nämlich formuliert er klar und unzweideutig und ohne von dem „Möglichkeits"-Begriffe Gebrauch zu machen, was er unter „Wirklichkeit" versteht. Mill sagt: „Wenn die Erscheinung in dem Bereich der gegenwärtigen Beobachtung ist, so überzeugen wir uns durch gegenwärtige Beobachtung von ihrer Existenz; wenn sie außerhalb dieses Bereiches ist und daher abwesend genannt wird, so folgern wir ihre Existenz aus Merkmalen oder Beweisen. Aber was können dies für Beweise sein? Andere Erscheinungen, von denen durch Induktion erwiesen ist, daß sie mit der abwesenden Erscheinung entweder durch Folge oder Zugleichsein im Zusammenhang stehen".

Also: Auch die Wirklichkeit der nicht wahrgenommenen Erscheinungen wird — nach Mill — durch Wahrnehmung festgestellt, nämlich: durch die Wahrnehmung von anderen Erscheinungen, die mit den ersteren durch ein Naturgesetz verbunden sind. Zum Beispiel: Wenn wir das Atom auch nicht sehen, so können wir doch — nach Mill — seine Existenz behaupten, indem wir dieselbe „aus Merkmalen oder Beweisen folgern".

Ein Zirkel ist also bei Mill gewiß nicht vorhanden. Im Gegenteil: Was er in jenen wenigen, klassischen Sätzen formulierte, ist nichts anderes als der Wirklichkeitsbegriff der exakten Naturwissenschaft. Heinrich Löwy.

**E. Wedekind, Kolloidchemie.** 8°. 122 S. Mit 9 Figuren. Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter u. Co. 1925, Sammlung Göschen Nr. 897. Preis geb. M. 1,25.

Diese gut disponierte Übersicht über die wichtigeren Tatsachen der Kolloidchemie wird hier vom Standpunkt des Chemikers aus gegeben. Die Zahl der für ein breiteres Publikum bestimmten Darstellungen der Kolloidchemie ist heute bereits sehr groß und es finden sich darunter auch genügend viele in jeder Beziehung vorzügliche Werke. Immerhin wird das im Rahmen und mit den äußeren Vorzügen der bekannten Sammlung erschienene Werkchen als eine angenehme Einführung in ein heute weithin interessierendes Gebiet dienen können. L. Ebert.

## Personalien.

**(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Habilitiert:** An der Universität Berlin Professor Dr. Kurt Hess von der organischen Abteilung des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin.

**Gestorben:** Der ord. Professor der Agrikulturchemie an der Universität München Geh. Regierungsrat Dr. Emil Ramann, der frühere ord. Professor der allgemeinen Chemie Knut Wilhelm Palmer an der Technischen Hochschule Stockholm, der a. o. Professor der pharmazeutischen und medizinischen Chemie an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wilhelm Autenrieth.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.